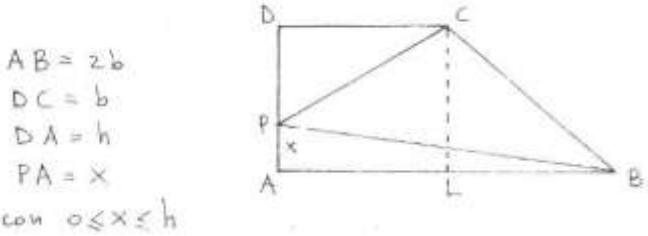
Luglio 1960

E' dato un trapezio ABCD rettangolo in A e in D, nel quale la base maggiore AB, la base minore DC e l'altezza AD hanno rispettivamente le misure 2b, b, h.
Si determini su AD un punto P in modo che BC risulti ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti rispettivamente uguali a CP e alla metà di BP.
E' facoltativa la discussione geometrica.



Risulta

$$BC^2 = h^2 + b^2$$

$$PC^2 = PD^2 + DC^2 = (h-x)^2 + b^2$$

$$PB = \sqrt{x^2 + 4b^2}$$

$$\frac{PB}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + 4b^2}}{2}$$

Imponendo la condizione del problema, si ha

$$BC^2 = PC^2 + \left(\frac{PB}{2}\right)^2$$

$$h^2 + b^2 = (h-x)^2 + b^2 + \frac{x^2 + 4b^2}{4}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 5x^2 - 8hx + 4b^2 = 0 \\ 0 \le x \le h \quad h > 0, b > 0 \end{array}}$$

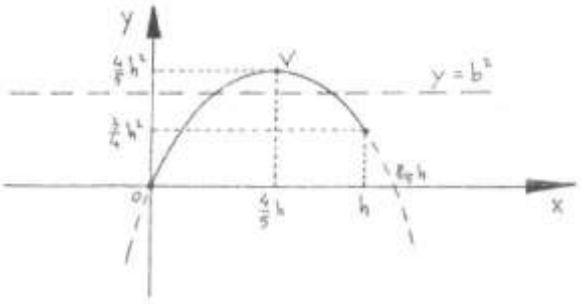
L'equazione ha due parametri (h e b). Il risultato della discussione fornirà le relazioni che collegano uno dei due parametri all'altro: è perciò indifferente eseguire la discussione rispetto ad h o a b.

Discutiamo rispetto a b, perché h è presente nelle limitazioni della variabile x.

Ponendo $b^2 = y$ si ha

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{4}x^2 + 2hx \\ y = b^2 \end{cases}$$

Cioè un arco di parabola con ascisse comprese fra 0 e h, e un fascio di rette orizzontali.



Si ha una soluzione per

$$0 \le b^2 < \frac{3}{4}h^2$$

$$\boxed{0 \le b < \frac{h\sqrt{3}}{2}} \quad \text{oppure} \quad h > \frac{2b\sqrt{3}}{3}$$

E due soluzioni per

$$\frac{3}{4}h^2 \le b^2 \le \frac{4}{5}h^2$$

$$\boxed{\frac{h\sqrt{3}}{2} \le b \le \frac{2h\sqrt{5}}{5}} \quad \text{oppure} \quad \frac{2b\sqrt{3}}{3} \le h \le \frac{b\sqrt{5}}{2}.$$