Settembre 1960

In un piano sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, si considerino le curve di equazione

$$y = a^2x^3 - 3a(2a-3)x^2 + 9(a-1)(a-3)x + b$$

Essendo a e b due parametri, determinando quelle particolari curve per le quali il punto di minimo e il punto di massimo hanno le ordinate rispettivamente uguali a zero ed a uno.
Trovare le ascisse dei punti di minimo e di massimo e quelle degli altri punti di queste particolari curve, che appartengono alle rette di equazioni y = 0 e y = 1, si calcolino per ciascuna curva le aree delle regioni finite delimitate dalla curva e dalle rette di cui sopra.
Limitatamente a una delle curve particolari si scriva l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y, che passa per il punto di massimo della curva e per i suoi punti di ordinata nulla, e si calcoli l'area della regione parabolica i cui punti hanno ordinata positiva e non maggiore di quella del predetto punto di massimo.

Derivando si ha

$$y' = 3a^2x^2 - 6ax(2a-3) + 9(a^2 - 4a + 3)$$

Uguagliando a zero e risolvendo si ottiene

$$a^2x^2 - 2ax(2a-3) + 3a^2 - 12a + 9 = 0$$

$$x = \frac{2a-3 \pm a}{a} = \left\langle \begin{array}{c} \dfrac{3a-3}{a} \\[2ex] \dfrac{a-3}{a} \end{array} \right.$$

Per distinguere quale di questi due valori è l'ascissa del massimo e del minimo, invece dello studio del segno della derivata prima, possiamo sostituire questi due valori nella derivata seconda della funzione e osservare il segno dei risultati (se il segno è positivo il punto è un minimo, se è negativo è un massimo).

$$y'' = 6a^2x - 6a(2a-3)$$

$$\begin{cases} f''\left(\dfrac{3a-3}{a}\right) = 6a^2 > 0 \quad \text{l'ascissa è quella del minimo} \\ f''\left(\dfrac{a-3}{a}\right) = -6a^2 < 0 \quad \text{l'ascissa è quella del massimo} \end{cases}$$

Imponiamo ora che l'ordinata del minimo sia 0 e quella del massimo sia 1.

$$f\left(\frac{3a-3}{a}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad -27(a-1)^2 + ab = 0$$

$$\boxed{(1) \qquad ab = 27(a-1)^2}$$

$$f\left(\frac{a-3}{a}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{(a-3)^2}{a}(4a-3) + b - 1 = 0$$

$$\boxed{(2) \qquad b = \frac{(a-3)^2(3-4a)}{a}}$$

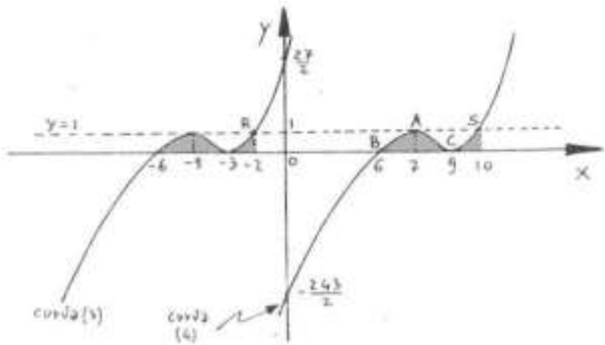
Risolvendo il sistema formato dalle (1) e (2) si ottengono due coppie di soluzioni (tenendo presente che deve essere $a \neq 0$)

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{27}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{243}{2} \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nell'equazione iniziale, si hanno le due curve

$$\boxed{(3) \qquad y = \frac{x^3}{4} + 3x^2 + \frac{45}{4}x + \frac{27}{2}}$$

$$\boxed{(4) \qquad y = \frac{x^3}{4} - 6x^2 + \frac{189}{4}x - \frac{243}{2}}$$



$$R \equiv (-2;1) \qquad S \equiv (10;1)$$

Calcoliamo le aree delle regioni ombreggiate

$$S_3 = \int_{-6}^{-2} \left(\frac{x^3}{4} + 3x^2 + \frac{45}{4}x + \frac{27}{2} \right) dx = 2$$

$$S_4 = \int_{6}^{10} \left(\frac{x^3}{4} - 6x^2 + \frac{189}{4}x - \frac{243}{2} \right) dx = 2$$

Determiniamo infine l'equazione della parabola con asse verticale e che passa per A, B, C.

Imponendo il passaggio dell'equazione generica $y = ax^2 + bx + c$ per tali punti, si ha

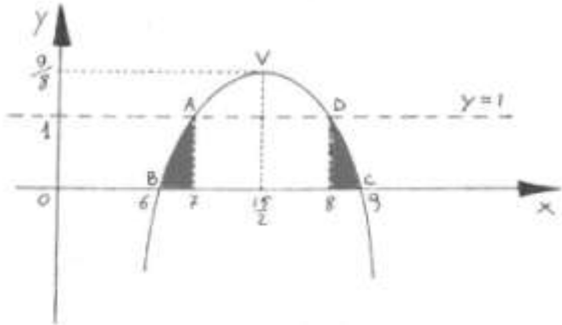
$$\begin{cases} 1 = 49a + 7b + c \\ 0 = 36a + 6b + c \\ 0 = 81a + 9b + c \end{cases}$$

Risolvendo si trova

$$a = -\frac{1}{2} \qquad b = \frac{15}{2} \qquad c = -27$$

E perciò la parabola ha equazione

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{15}{2}x - 27}$$



Il grafico non è in scala. Le due zone ombreggiate sono uguali per simmetria e l'area di ciascuna delle due è

$$S = \int_6^7 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{15}{2}x - 27 \right) dx = \frac{7}{12}$$

E dunque la loro somma è

$$\boxed{S = \frac{7}{6}}.$$