

Luglio 1961

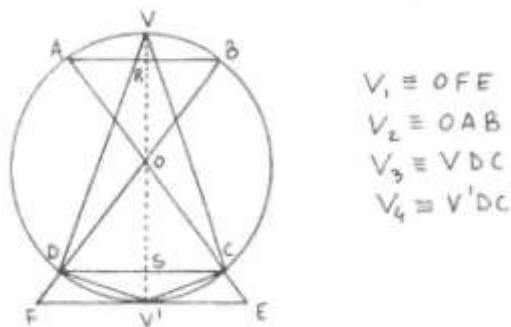
Indicato con VV' un diametro di una sfera di centro O e raggio r , si considerino i seguenti quattro coni:

- 1) Il cono di vertice O , asse OV' e base tangente alla sfera.
- 2) Il cono opposto al vertice del precedente, avente la circonferenza di base sulla superficie sferica.
- 3) Il cono di vertice V , asse VV' , apertura metà di quella dei due coni precedenti e inscritto nella sfera.
- 4) Il cono di vertice V' , inscritto nella sfera e avente la stessa base di quella del terzo cono.

Dopo di ciò, indicati con V_1, V_2, V_3, V_4 rispettivamente i volumi dei quattro coni, si determini l'angolo di apertura del primo cono in modo che sia soddisfatta la relazione

$$\frac{V_1 - V_2}{V_4} - (k - 3) \frac{V_1 + V_2}{V_3} = 2k$$

Con k numero reale dato. Discussione.



Nel triangolo rettangolo OSC è

$$SC = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Poiché il triangolo OV'E è simile al triangolo OSC, si ha

$$OS : SC = OV' : V'E$$

$$V'E = \frac{SC \cdot OV'}{OS} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2}}{x}$$

Per il cono generato dal triangolo OFE si ha perciò

$$V_1 = \frac{\pi \cdot V'E^2 \cdot OV'}{3} \rightarrow \boxed{V_1 = \frac{\pi r^3 (r^2 - x^2)}{3x^2}}$$

Nel triangolo rettangolo ORB è

$$RB = SC = \sqrt{r^2 - x^2}$$

E perciò

$$V_2 = \frac{\pi \cdot RB^2 \cdot OR}{3} \rightarrow \boxed{V_2 = \frac{\pi x (r^2 - x^2)}{3}}$$

Nel triangolo rettangolo VSC si ha

$$VS = r + x \quad SC = \sqrt{r^2 - x^2}$$

E perciò

$$V_3 = \frac{\pi \cdot SC^2 \cdot VS}{3} \rightarrow \boxed{V_3 = \frac{\pi (r^2 - x^2) (r + x)}{3}}$$

Nel triangolo rettangolo V'SC è

$$V'S = r - x$$

E perciò

$$V_4 = \frac{\pi \cdot SC^2 \cdot V'S}{3} \rightarrow \boxed{V_4 = \frac{\pi (r^2 - x^2) (r - x)}{3}}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$\frac{V_1 - V_2}{V_4} - (k - 3) \frac{V_1 + V_2}{V_3} = 2k$$

$$\frac{\frac{\pi r^3 (r^2 - x^2)}{3x^2} - \frac{\pi x (r^2 - x^2)}{3}}{\frac{\pi (r^2 - x^2)(r - x)}{3}} - (k - 3) \frac{\frac{\pi r^3 (r^2 - x^2)}{3x^2} + \frac{\pi x (r^2 - x^2)}{3}}{\frac{\pi (r^2 - x^2)(r + x)}{3}} = 2k$$

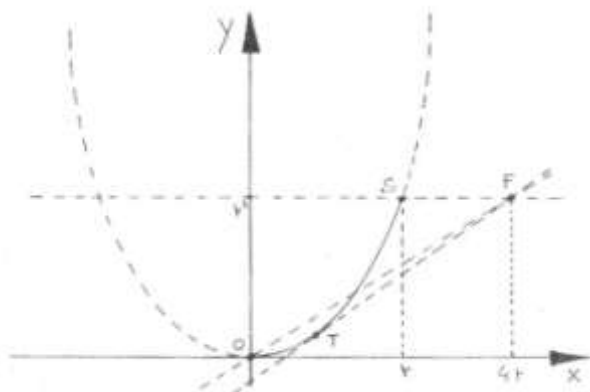
$$\frac{\frac{r^3}{x^2} - x}{r - x} - (k - 3) \frac{\frac{r^3}{x^2} + x}{r + x} = 2k$$

Sotto la condizione $x \neq 0$ e $x \neq \pm r$, si trova

$$\boxed{\begin{aligned} x^2(4 - 3k) + rx(k - 2) - r^2(k - 4) &= 0 \\ 0 < x < r \end{aligned}}$$

Eseguiamo la discussione geometrica ponendo $x^2 = y$. Si ottiene

$$\begin{cases} y = \frac{r(2 - k)}{4 - 3k}x + r^2 \frac{k - 4}{4 - 3k} \\ y = x^2 \end{cases}$$



Cioè un fascio di rette con centro nel punto

$$F \equiv (4r; r^2)$$

E una parabola con ascisse comprese fra 0 ed r .

Imponiamo alla retta del fascio di passare per S, O, T.

$$S \equiv (r; r^2) \rightarrow r^2 = r^2 \frac{2-k}{4-3k} + r^2 \frac{k-4}{4-3k} \rightarrow k=2$$

$$O \equiv (0; 0) \rightarrow r^2 \frac{k-4}{4-3k} = 0 \rightarrow k=4$$

$$T \rightarrow \Delta = r^2 \frac{(2-k)^2}{(4-3k)^2} + 4r^2 \frac{k-4}{4-3k} = 0 \rightarrow k = \frac{30 \pm 4\sqrt{15}}{11}$$

Nel caso della tangenza le due soluzioni corrispondono approssimativamente a

$$k = \frac{30 - 4\sqrt{15}}{11} \cong 1,4 \quad k = \frac{30 + 4\sqrt{15}}{11} \cong 4,1$$

Il primo valore è da scartare perché corrisponde ad una tangenza in un punto della parabola molto superiore ad S. Mentre il secondo corrisponde alla tangenza in T perché basta osservare che il valore differisce di poco da quello ottenuto per il passaggio in O. Quindi

Si ha una soluzione per

$$2 < k \leq 4$$

E due soluzioni per

$$4 < k \leq \frac{30 + 4\sqrt{15}}{11}$$