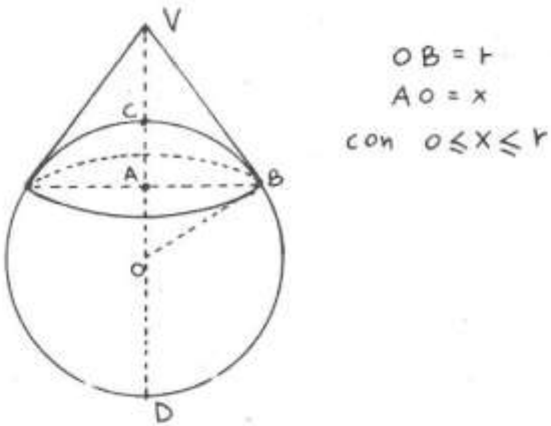
Settembre 1961

Data una sfera di centro O e raggio r, si conduca un piano secante non passante per il centro e si indichino: con S l'area della superficie della sfera; con S_1 l'area della calotta maggiore che così si ottiene; con S_2 l'area della superficie laterale del cono avente per base il cerchio sezione così ottenuto e le generatrici tangenti alla sfera.
Si determini la distanza del piano secante dal centro O in modo che si abbia

$$S_2 + k\,S_1 = 2\,S$$

Con k numero positivo dato.
Esprimendo poi k in funzione della distanza del piano secante dal centro della sfera, si studi l'andamento di tale funzione.



Per valori di x compresi fra 0 e – r si hanno situazioni simmetriche e il cono si trova nella parte inferiore della sfera.
Si ha

$$\begin{cases} S = 4\pi OB^2 \\ S_1 = 2\pi OB \cdot AD \\ S_2 = \pi AB \cdot VB \end{cases}$$

È anche

$$AD = r + x$$

$$AB = \sqrt{r^2 - x^2}$$

I triangoli ABO e VBO sono simili e perciò

$$VB : OB = AB : AO \quad \rightarrow \quad VB = \frac{OB \cdot AB}{AO} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2}}{x}$$

Si ha quindi

$$S = 4\pi r^2 \qquad S_1 = 2\pi r(r + x) \qquad S_2 = \frac{\pi r(r^2 - x^2)}{x}$$

Applicando la relazione del problema, si ha

$$S_2 + k\, S_1 = 2\, S$$

$$\frac{\pi r(r^2 - x^2)}{x} + k \cdot 2\pi r(r + x) = 8kr^2$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x^2(2k - 1) - 2rx(4 - k) + r^2 = 0 \\ 0 \le x \le r \qquad k > 0 \end{array}}$$

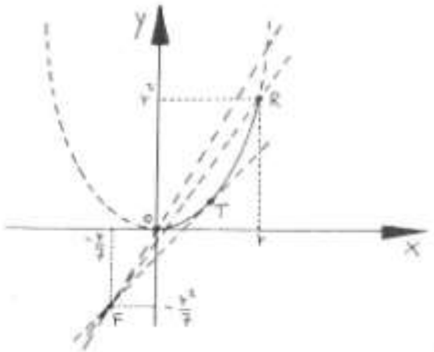
Ponendo $x^2 = y$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = 2rx\,\dfrac{4 - k}{2k - 1} - \dfrac{r^2}{2k - 1} \\ y = x^2 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette con centro nel punto

$$F \equiv \left(-\frac{r}{7}; -\frac{r^2}{7} \right)$$

E una parabola con vertice nell'origine, asse verticale e ascisse comprese fra 0 ed r.



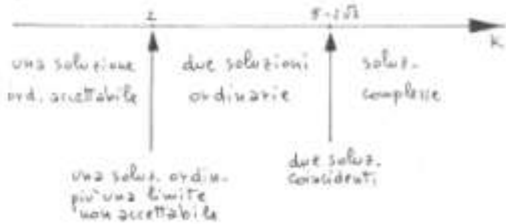
Imponendo il passaggio per O, R, T si trovano i seguenti valori di k

$$R \quad \to \quad k = 2$$

$$O \quad \to \quad k = -\infty$$

$$T \quad \to \quad k = 5 - 2\sqrt{2}$$

E perciò si ha



Riprendiamo ora l'equazione parametrica

$$x^2(2k-1) - 2rx(4-k) + r^2 = 0$$

Ed esplicitiamo il parametro k. Si ottiene

$$\boxed{k = \frac{x^2 - 8rx - r^2}{2x(x+r)}}$$

Funzione algebrica di terzo grado, fratta, con 0 < x < r, con due asintoti verticali di equazione $x = 0$ e $x = -r$ e uno orizzontale di equazione y = ½.

La derivata prima è

$$k' = \frac{-2r\left(7x^2 - 2rx - r^2\right)}{\left(2x^2 + 2rx\right)^2}$$

E lo studio del segno fornisce

$$f\left(r\frac{1-2\sqrt{2}}{7}\right) = 5 + 2\sqrt{2} \qquad f\left(r\frac{1+2\sqrt{2}}{7}\right) = 5 - 2\sqrt{2}$$

Poiché poi esiste la limitazione

$$0 < x < r$$

La curva può assumere solo i valori corrispondenti al ramo tracciato con linea continua nella figura seguente