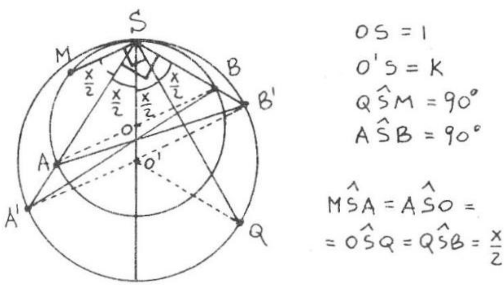
Luglio 1962

Consideriamo due circonferenze complanari, tangenti internamente in un punto S, una di centro O e raggio unitario, e l'altra di centro O' e raggio k. Indichiamo poi:

a) **Con SM una corda della circonferenza di centro O, formante l'angolo x con la SO, e con SA e SA' le corde delle due circonferenze di centri O e O', appartenenti alla bisettrice dell'angolo OSM.**
b) **Con SQ la corda della circonferenza di centro O', perpendicolare a SM, e con SB, SB' le corde delle due circonferenze di centri O e O' appartenenti alla perpendicolare ad SA..**

Successivamente:

1) **Si determini l'angolo x in modo che risulti**
$$\frac{AB'^2 - A'B^2}{SQ^2} = 2 - 3k^2$$
2) **Si calcoli, nell'ipotesi di k costante, il massimo di SM + SQ.**
3) **(Facoltativo) Si studi la variazione della funzione**
$$f(x) = SM^2 + SQ^2$$



Il triangolo OAS è isoscele con OS = OA = 1 e

$$AOS = 180 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 180 - x$$

Applichiamo il teorema di Carnot per trovare SA^2

$$SA^2 = 1 + 1 - 2\cos(180 - x) = 2 + 2\cos x$$

Anche il triangolo O'A'S è isoscele con O'S = O'A' = k e

A'O'S = 180 – x

Con Carnot si trova

$$SA'^2 = k^2 + k^2 - 2 \cdot k \cdot k \cdot \cos(180 - x) = 2k^2 + 2k^2 \cos x$$

Anche il triangolo SOB è isoscele con OS = OB = 1 e poiché

$$OSB = 90 - x \quad \rightarrow \quad SOB = 180 - 2\left(90 - \frac{x}{2}\right) = x$$

Si ha

$$SB^2 = 1 + 1 - 2\cos x = 2 - 2\cos x$$

Infine anche il triangolo SO'B' è isoscele con O'S = O'B' = k e con SO'B' = x. Con Carnot abbiamo

$$SB'^2 = k^2 + k^2 - 2 \cdot k \cdot k \cdot \cos x = 2k^2 - 2k^2 \cos x$$

Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ASB' e A'SB si trova

$$AB'^2 = SA^2 + SB'^2 \rightarrow \quad \boxed{AB'^2 = 2 + 2\cos x + 2k^2 - 2k^2 \cos x}$$

$$A'B^2 = SA'^2 + SB^2 \rightarrow \quad \boxed{A'B^2 = 2 - 2\cos x + 2k^2 + 2k^2 \cos x}$$

Calcoliamo ora SQ^2 osservando che anche il triangolo SO'Q è isoscele con SO' = O'Q = k e poiché

$$QSO' = 90 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 90 - x \quad \rightarrow \quad SO'Q = 180 - 2(90 - x) = 2x$$

Quindi con Carnot si ha

$$SQ^2 = k^2 + k^2 - 2 \cdot k \cdot k \cdot \cos 2x \rightarrow \quad \boxed{SQ^2 = 4k^2 - 4k^2 \cos^2 x}$$

Applicando la relazione del problema si ha

$$\frac{AB'^2 - A'B^2}{SQ^2} = 2 - 3k^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(1 - k^2)\cos x}{k^2(1 - \cos^{2x})} = 2 - 3k^2$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(1)\quad \left(1-k^2\right)\cos x = \left(2-3k^2\right)k^2 \text{sen}^2 x \\ 0 < x < 90\end{array}}$$

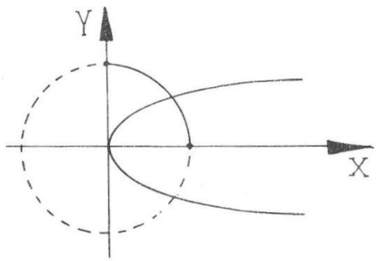
Poniamo

$$\begin{cases}\cos x = X \\ \text{sen}\, x = Y\end{cases}$$

E associamo alla (1) la relazione fondamentale della trigonometria. Si ha il sistema

$$\begin{cases}X = \dfrac{\left(2-3k^2\right)k^2}{1-k^2}Y^2 \\ X^2 + Y^2 = 1\end{cases}$$

Cioè una famiglia di parabole con asse orizzontale, vertice nell'origine ed apertura variabile al variare di k. Ed una circonferenza di cui dobbiamo considerare solo l'arco compreso nel primo quadrante.



C'è sempre una sola intersezione, e quindi una sola soluzione, purché la parabola abbia concavità rivolta verso destra, cioè deve essere

$$\frac{\left(2-3k^2\right)k^2}{1-k^2} > 0$$

Studiandone il segno si ottiene per il problema una soluzione quando

$$\boxed{0 < k^2 < \frac{2}{3} \qquad \text{e per} \qquad k^2 > 1}$$

Passiamo al punto successivo del problema e calcoliamo SM.
Il triangolo SMO è isoscele con OS = OM = 1 e poiché l'angolo OSM = x, l'angolo MOS = 180 – 2x.
Applicando Carnot si ha

$$SM = \sqrt{1+1-2\cos(180-2x)} = \sqrt{2+2\cos 2x} =$$

$$= \sqrt{2(1+\cos 2x)} = \sqrt{4\cos^2 x} = 2\cos x$$

D'altronde è anche

$$SQ = \sqrt{4k^2 - 4k^2\cos^2 x} = \sqrt{4k^2(1-\cos^2 x)} = 2k\,\text{sen}\,x$$

Consideriamo ora la funzione

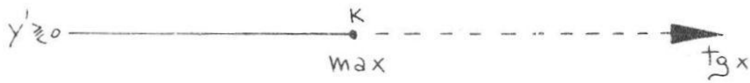
$$y = SM + SQ$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (2) & y = 4\cos^2 x + 4k^2\text{sen}^2 x \\ & \qquad 0 < x < 90 \end{array}}$$

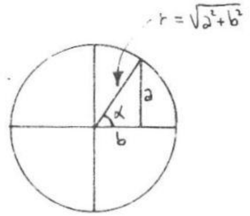
Con k costante. Derivando si ha

$$y' = -2\,\text{sen}\,x + 2k\cos x \geq 0$$

$$-\tan x + k \geq 0$$



Ricorriamo ora alle seguenti formule trigonometriche



$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{r}{b}} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1}} = \dfrac{tg\,\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha+1}} \\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{b}{r} = \dfrac{1}{\frac{r}{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{tg^2\alpha+1}} \end{cases}$$

Sostituendole nella (2) si ha

$$y = \frac{2}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} + \frac{2k \tan x}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} \qquad \text{e, ponendo } \tan x = k$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}} + \frac{2k^2}{\sqrt{k^2 + 1}} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{y = 2\sqrt{k^2 + 1}}$$

Che è il valore massimo che può assumere la (2).
Passiamo infine alla parte facoltativa del problema. Essendo

$$SM^2 = 4\cos^2 x \qquad SQ^2 = 4k^2 - 4k^2 \cos^2 x$$

Si ha

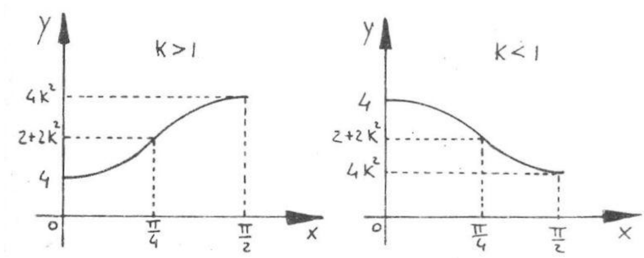
$$y = SM^2 + SQ^2$$

$$\boxed{\begin{gathered} y = 4\cos^2 x + 4k^2 \cos^2 x \\ 0 < x < 90 \end{gathered}}$$

Funzione con k costante ed equivalente a MQ^2. Si ottengono due curve diverse a seconda che k > 1 oppure k < 1.
Le funzioni nei due casi sono rispettivamente

$$y' = \operatorname{sen} x \cos x \left(8k^2 - 8\right) \qquad y' = \left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)\left(8k^2 - 8\right)$$

E le curve corrispondenti sono



Infine, se k = 1 la funzione degenera nella retta

$$y = 4$$