Settembre 1962

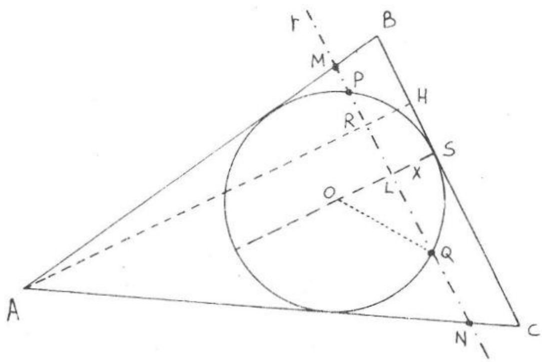
Sia dato il triangolo ABC, i cui lati hanno le misure AB = 13, BC = 14, CA = 15 e si consideri la circonferenza inscritta in esso. Determinare la parallela r al lato BC in modo che, dette MN e PQ le corde che su r staccano rispettivamente il triangolo e la circonferenza, si abbia

$$PQ + \frac{6}{7} MN = s$$

Essendo s un numero positivo assegnato.
Facoltativamente si distinguano i casi in cui s risulta maggiore o minore della misura dell'altezza relativa al lato BC.
N.B. Si consiglia di assumere come incognita la distanza fra le rette r e BC.

Il triangolo ABC non è rettangolo perché

$$13^2 + 14^2 \neq 15^2$$



Applichiamo la formula di Erone per calcolare l'area del triangolo ABC. Il semiperimetro è p = 21, e perciò

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=\sqrt{7056}=84$$

Il doppio dell'area divisa per la base BC, dà l'altezza AH

$$AH=\frac{2\cdot 84}{14}=12$$

Ora poniamo

$$LS=x \qquad (\text{con}\,0\le x\le 2r)$$

Si ha

$$OL=r-x$$

$$LQ=\sqrt{r^2-(r-x)^2}=\sqrt{2rx-x^2}$$

$$\boxed{PQ=2\sqrt{2rx-x^2}}$$

Inoltre il triangolo ABC è simile al triangolo AMN e perciò

$$BC:AH=MN:AR$$

$$MN=\frac{BC\cdot AR}{AH}=\frac{14(12-x)}{12}$$

$$\boxed{MN=\frac{7(12-x)}{6}}$$

Applicando la relazione del problema, si ha

$$PQ+\frac{6}{7}MN=s$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}(1) & 2\sqrt{2rx-x^2}=s-12+x \\ & 0\le x\le 2r\end{array}}$$

Poiché la presenza del coefficiente letterale r risulta scomoda nella discussione, determiniamo il suo valore numerico ricordando che il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo è

$$r=(p-a)\tan\frac{\alpha}{2}$$

Ma una delle formule di Briggs asserisce che

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

E perciò

$$r=(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=$$

$$=\sqrt{\frac{6\cdot 7\cdot 8}{21}}=4$$

Sostituendo nella (1) si ottiene

$$\boxed{\begin{array}{l} (2) \qquad 2\sqrt{8x-x^2}=s-12+x \\ \qquad\qquad 0\le x\le 8 \end{array}}$$

Eseguiamo la discussione ponendo

$$\sqrt{8x-x^2}=y$$

Elevando al quadrato, si ha il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x=0 \\ y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{s}{2}-6 \end{cases} \qquad \text{con } \ 0\le x\le 8 \ \text{ e } \ y\ge 0$$

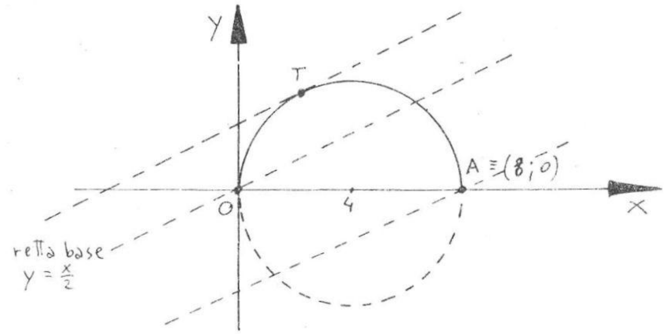
Cioè una semicirconferenza con centro nel punto (4;0) e raggio 4, e un fascio di rette parallele con coefficiente angolare ½.
Imponiamo il passaggio delle rette del fascio per i punti O, A, T.

$$O \quad \rightarrow \quad \frac{s}{2}-6=0 \quad \rightarrow \quad s=12$$

$$A \quad \rightarrow \quad 0+\frac{8}{2}+\frac{s}{2}-6 \quad \rightarrow \quad s=4$$

$$T \ \rightarrow \ \frac{\Delta}{4}=(28-s)^2-5\left(s^2-24s+144\right)=0 \ \rightarrow \ s=8\pm 4\sqrt{5}$$

Il grafico che si ottiene è il seguente



Dove si ha la tangenza in T con il segno positivo. Quindi, riassumendo