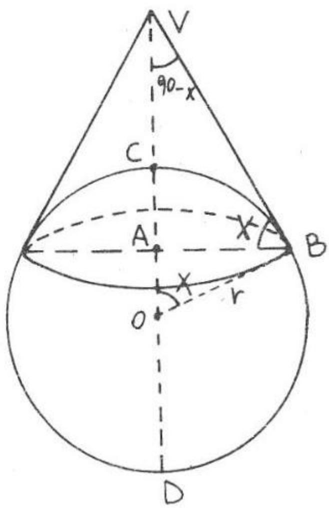
Luglio 1963

Tagliare una sfera di raggio r con un piano in maniera che la somma delle aree della maggiore delle due calotte così ottenute, e della superficie laterale del cono tangente alla sfera e avente per base il cerchio sezione, stia nel rapporto k con l'area della sezione. Discussione.
Successivamente si studi la variazione del predetto rapporto k in funzione della distanza del piano secante dal centro e, disegnato il grafico relativo, si trovino i risultati ottenuti con la discussione precedente.

Poniamo

$$A\hat{O}B = x \quad \text{con} \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}$$



Nel triangolo AOB si ha

$$AB = r\,\text{sen}\,x \qquad AO = r\cos x \qquad AD = r + r\cos x$$

Nel triangolo VOB è invece

$$VB = r\tan x$$

Ricordando che

$$\begin{cases} S_{calotta} = 2\pi \cdot OB \cdot AD \\ S_{lat.cono} = \pi \cdot AB \cdot VB \end{cases}$$

Applicando la relazione del problema si ha

$$\frac{S_{calotta} + S_{lat.cono}}{\pi \cdot AB^2} = k \qquad (\text{con } k > 0)$$

$$\frac{2\pi r\left(r + r\cos x\right) + \pi r\,\text{sen}\,x \cdot r\tan x}{\pi r^2 \text{sen}^2 x} = k$$

Cioè

$$k\cos^3 x + \cos^2 x + \cos x\left(2 - k\right) + 1 = 0$$

Dividendo con Ruffini si ha

$$\left(\cos x + 1\right)\left[k\cos^2 x + \left(1 - k\right)\cos x + 1\right] = 0$$

Il fattore $\left(\cos x + 1\right)$ può essere tralasciato perché risulta sempre $\cos x \neq -1$ $(x \neq \pi)$. Si ha dunque l'equazione parametrica

$$\boxed{\begin{matrix} k\cos^2 x + \left(1 - k\right)\cos x + 1 = 0 \\ 0 < \cos x \leq 1 \qquad k > 0 \end{matrix}}$$

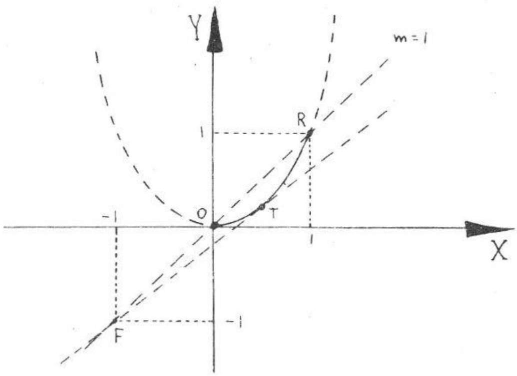
Poniamo

$$\begin{cases} \cos x = X \\ X^2 = Y \end{cases}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} Y = \dfrac{k-1}{k} X - \dfrac{1}{k} \\ Y = X^2 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette con centro nel punto $F \equiv (-1;-1)$ e coefficiente angolare $m = \frac{k-1}{k}$, e una parabola con asse verticale, concavità verso l'alto, vertice nell'origine e ascisse comprese fra zero ed uno.



La retta del fascio passa per O e per R quando

$$m = \frac{k-1}{k} = \tan 45° = 1 \quad \to \quad 1 - \frac{1}{k} = 1 \quad \to \quad k = \infty$$

Passa invece per T quando

$$\Delta = (1-k)^2 - 4k = 0 \quad \to \quad k = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

La soluzione $3 - 2\sqrt{2}$ va scartata perché rende $m = -2 - 2\sqrt{2}$, cioè negativo. Quindi si hanno due soluzioni per

$$\boxed{k \geq 3 + 2\sqrt{2}}$$

Poniamo ora r cos x = h nella espressione

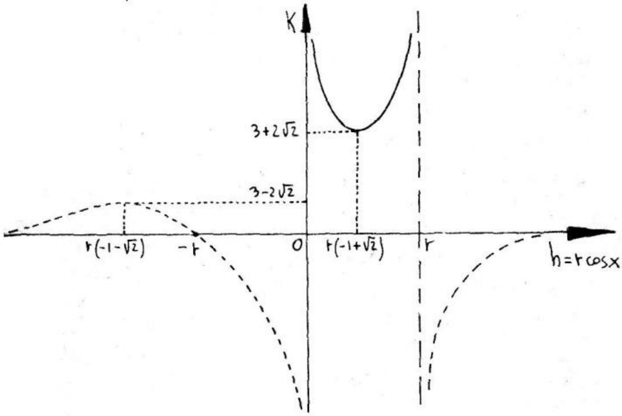
$$\frac{2r(r + r\cos x) + r^2 \operatorname{sen} x \cdot \tan x}{r^2 \operatorname{sen}^2 x} = k$$

Si ottiene

$$k = \frac{rh^2 + 2r^2h + r^3}{r^2h - h^3}$$

$$k = \frac{r(r+h)^2}{h(r^2-h^2)} \quad \to \quad \boxed{k = \frac{r(r+h)}{h(r-h)}}$$

Che corrisponde alla seguente funzione



La curva ha significato geometrico solo per $0 < h \le r$ ed h può assumere due valori per $k \ge 3 + 2\sqrt{2}$ come già visto nella discussione precedente.