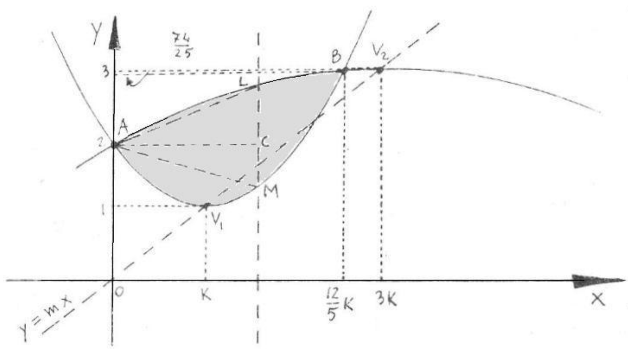
Settembre 1963

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, sono date due parabole con gli assi perpendicolari agli assi x, i cui vertici sono allineati con l'origine O e abbiano le ordinate rispettivamente 1 e 3.
Si sa inoltre che le due curve hanno in comune il punto $A \equiv (0;2)$**.**

Assunto come parametro k l'ascissa del vertice di ordinata minore, si scrivano le equazioni delle due curve e si esprimano per mezzo di k le coordinate del loro secondo punto di incontro, indi si determini l'area della regione limitata dalle due curve. Infine si trovino, tra le corde della regione considerata che siano parallele all'asse y:

a) Quella di lunghezza massima.
b) Quella che con il punto A individua il triangolo di area massima.



L'equazione generica delle due parabole è

$$y = ax^2 + bx + c$$

imponiamo il passaggio per $A \equiv (0;2)$, si ottiene c = 2 e perciò rimane

$$y = ax^2 + bx + 2$$

Indicando con k l'ascissa del vertice di ordinata minore, esso avrà coordinate

$$V_1 \equiv (k;1)$$

Imponendo alla y = mx di passare per V, si ricava

$$1 = mx \qquad \rightarrow \qquad m = \frac{1}{k}$$

Quindi la seconda parabola ha vertice V_2 che si trova sulla retta $y = \frac{1}{k}x$ ed ha ordinata 3. Le sue coordinate sono dunque

$$V_2 \equiv (3k;3)$$

Imponiamo infine all'equazione generica di avere vertice nei punti V_1 e V_2. Si ha

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = k \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 3k \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = 2ka \\ -b^2 + 8a = 4a \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -b = 6ka \\ -b^2 + 8a = 12a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{k^2} \\ b = -\dfrac{2}{k} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{9k^2} \\ b = \dfrac{2}{3k} \end{cases}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{k^2}x^2 - \frac{2}{k}x + 2} \qquad\qquad \boxed{y = -\frac{1}{9k^2}x^2 + \frac{2}{3k}x + 2}$$

Indicando con B il secondo punto di incontro delle due parabole, si trova

$$B \equiv \left(\frac{12}{5}k; \frac{74}{25} \right)$$

La superficie della regione ombreggiata è data dall'integrale

$$S = \int_0^{\frac{12}{5}k} \left[\left(-\frac{x^2}{9k^2} + \frac{2x}{3k} + 2 \right) - \left(\frac{x^2}{k^2} - \frac{2x}{k} + 2 \right) \right] dx = \frac{64}{25}k$$

Consideriamo ora due generici punti L ed M delle parabole, aventi la stessa ascissa x. Le loro coordinate sono

$$\begin{cases} L \equiv \left(x; -\frac{x^2}{9k^2} + \frac{2x}{3k} + 2 \right) \\ M \equiv \left(x; \frac{x^2}{k^2} - \frac{2x}{k} + 2 \right) \end{cases}$$

E perciò la generica corda LM parallela all'asse y è lunga

$$LM = -\frac{x^2}{9k^2} + \frac{2x}{3k} + 2 - \left(\frac{x^2}{k^2} - \frac{2x}{k} + 2 \right) = \frac{-10x^2 + 24kx}{9k^2}$$

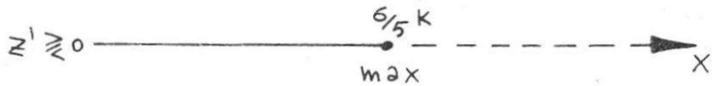
Indicando con z tale funzione, si ha

$$z = -\frac{10}{9k^2}x^2 + \frac{24}{9k}x$$

Il problema non richiede di tracciarne il grafico, ma soltanto di determinarne il massimo.
Derivandola, abbiamo

$$z = -\frac{20}{9k^2}x + \frac{24}{9k}$$

E, studiandone il segno,



La corda LM ha dunque lunghezza massima per $x = \frac{6}{5}k$.

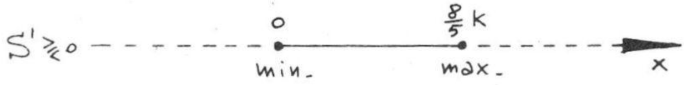
Consideriamo infine il triangolo ALM. La sua superficie generica è

$$S = \frac{LM \cdot AC}{2} = \frac{-10x^2 + 24kx}{9k^2} \cdot x \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5x^3}{9k^2} + \frac{4x^2}{3k}$$

Derivando si ha

$$S' = -\frac{5x^2}{3k^2} + \frac{8x}{3k}$$

E, studiandone il segno, si trova



Quindi il triangolo ALM ha area massima per $x = \frac{8}{5}k$.