

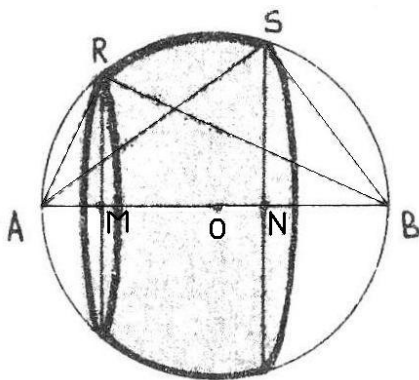
Luglio 1964

Internamente al diametro AB di una sfera di raggio r si determinino i punti M e N in modo che sia

$$NB = r - 2 AM$$

E che il rapporto fra l'area della zona sferica compresa fra i due piani perpendicolari al diametro AB nei punti M e N e la somma delle aree dei cerchi d'intersezione dei detti piani con la sfera, sia uguale ad un numero k assegnato. Discussione.

Dire per quale posizione di M la somma dei volumi dei due coni di vertice il centro della sfera e di base i cerchi già considerati, risulti massima.



Poniamo $AM = x$

Ne risulta che

$$NB = r - 2x$$

$$MB = 2r - x$$

$$AN = 2x + r$$

$$MN = r + x$$

Calcoliamo MR^2 e NS^2 applicando il secondo teorema di Euclide ai due triangoli rettangoli ARB e ASB

$$RM^2 = AM \cdot MB = x(2r - x)$$

$$NS^2 = AN \cdot NB = (2x + r)(r - 2x) = r^2 - 4x^2$$

La superficie della zona sferica è

$$S_1 = 2\pi \cdot AO \cdot MN = 2\pi r(r + x)$$

La superficie del cerchio passante per M è

$$S_2 = \pi \cdot MR^2 = \pi x(2r - x)$$

E quella del cerchio passante per N è

$$S_3 = \pi \cdot NS^2 = \pi(r^2 - 4x^2)$$

Applichiamo ora la relazione proposta dal problema

$$\frac{S_1}{S_2 + S_3} = k$$

Cioè

$$\frac{2\pi r^2 + 2\pi r x}{2\pi r x - \pi x^2 + \pi r^2 - 4\pi x^2} = k$$

Dividiamo per π e eliminiamo il denominatore

$$2r^2 + 2rx = 2rkx - kx^2 + kr^2 - 4kx^2$$

Semplificando si ottiene

$$(1) \quad 5kx^2 - 2rx(k - 1) + 2r^2 - kr^2 = 0$$

Che è l'equazione da discutere. Per le limitazioni dell'incognita abbiamo

$$0 \leq x \leq \frac{r}{2}$$

Infatti il valore massimo della x si ha quando $NB = 0$, ed in tal caso avviene che

$$r - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{r}{2}$$

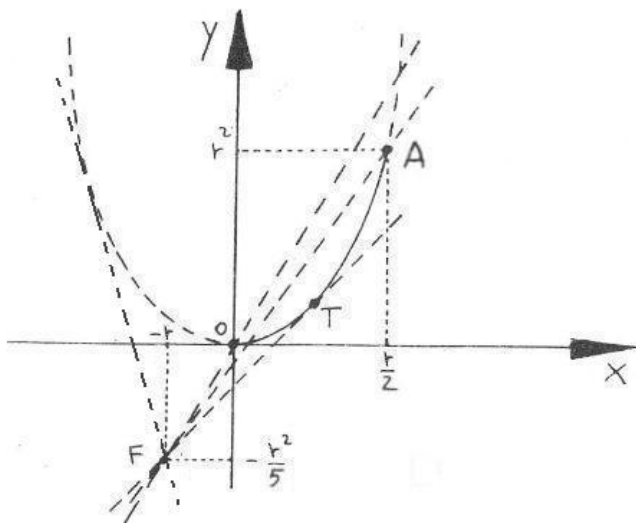
Inoltre, essendo k il rapporto fra due superfici, deve essere sempre $k > 0$.

Discutiamo il problema per via geometrica ponendo $y = x^2$ nella (1).

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2rx \frac{k-1}{5k} + r^2 \frac{k-2}{5k} \end{cases}$$

Si ottiene la solita parabola con vertice nell'origine e concavità verso l'alto, ed un fascio di rette con centro

$$F \equiv \left(-r; -\frac{r^2}{5} \right)$$



Il disegno non è in scala. Determiniamo per quali valori di k la retta del fascio passa per O , T , ed A .

$$A \equiv \left(\frac{r}{2}; \frac{r^2}{4} \right) \rightarrow \frac{r^2}{4} = r^2 \frac{k-1}{5k} + r^2 \frac{k-2}{5k} \rightarrow k = 4$$

$$O \equiv (0;0) \rightarrow r^2 \frac{k-2}{5k} = 0 \rightarrow k = 2$$

$$T \Rightarrow \Delta = 0 \rightarrow r^2(k-1)^2 - 5k(2r^2 - kr^2) = 0$$

$$6k^2 - 12k + 1 = 0 \rightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{30}}{6}$$

La soluzione con il segno meno va scartata perché corrisponde all'altra tangenza (con linea tratteggiata) con la retta che ha coefficiente angolare negativo.

Quindi abbiamo due intersezioni, cioè due soluzioni, per

$$\frac{6 + \sqrt{30}}{6} \leq k \leq 2$$

Ed una per

$$2 < k \leq 4$$

Occupiamoci ora della seconda parte del problema. Dalla figura all'inizio dell'esercizio si ricava

$$MO = r - x$$

$$NO = r - NB = 2x$$

Il volume dei due coni di cui si fa riferimento nel testo è

$$V_1 = \frac{\pi \cdot MR^2 \cdot MO}{3} = \frac{\pi x(2r - x)(r - x)}{3}$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot NS^2 \cdot NO}{3} = \frac{\pi(r^2 - 4x^2)2x}{3}$$

La funzione di cui dobbiamo calcolare il massimo è

$$y = V_1 + V_2$$

Cioè

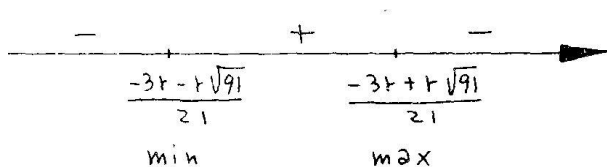
$$y = \frac{\pi}{3} \left[(2rx - x^2)(r - x) + 2r^2x - 8x^3 \right]$$

Da cui, semplificando,

$$y = \frac{\pi}{3} (-7x^3 - 3rx^2 + 4r^2x)$$

Calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno

$$y' = \frac{\pi}{3} (-21x^2 - 6rx + 4r^2)$$



Quindi il massimo cercato si ha quando

$$x = r \frac{\sqrt{91} - 3}{21}$$