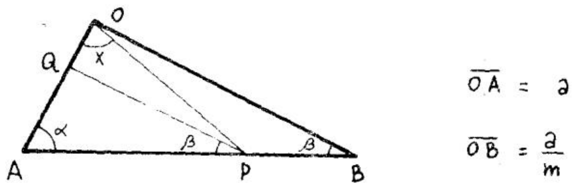
Settembre 1964

E' dato un triangolo AOB rettangolo in O, nel quale il cateto minore OA è lungo a e l'altro è lungo a/m.
Determinare sull'ipotenusa un punto P in modo che detta Q la sua proiezione ortogonale su OA, si abbia

$$\mathbf{OP + PQ = ka}$$

Essendo k un numero positivo dato. Si discuta il problema rispetto al parametro k.
(Facoltativamente) Il candidato può anche esaminare il caso di m > 1 sotto la quale ipotesi OA non risulta più il cateto minore.



Poiché per ragioni geometriche deve essere m > 0 e contemporaneamente (lo precisa il testo) OA < OB, vale per m la limitazione

$$0 < m < 1$$

Risolviamo il problema per via trigonometrica, e quindi poniamo

$$AOP = x$$

Nel triangolo OQP è

$$(1) \qquad \frac{QP}{OQ} = \tan x \qquad \rightarrow \qquad QP = OQ \tan x$$

$$(2) \qquad \frac{OQ}{OP} = \cos x \qquad \rightarrow \qquad OP = \frac{OQ}{\cos x}$$

Inoltre poiché i triangoli AOB e AQP sono simili, vale la proporzione

$$OA : OB = QA : QP$$

Da cui si ottiene

$$QA = \frac{OA \cdot QP}{OB} = \frac{a \cdot QP}{a/m} = m \cdot QP$$

È dunque

$$OQ = OA - QA = a - m\,QP$$

E sostituendo la (1) in quest'ultima, si ha

$$OQ = a - m\,OQ \tan x \qquad \rightarrow \qquad OQ = \frac{a}{1 + m\tan x}$$

Sostituendo ancora quest'espressione nelle (1) e (2) si ricava

$$\begin{cases} QP = \dfrac{a\tan x}{1 + m\tan x} \\ OP = \dfrac{a}{\cos x\left(1 + m\tan x\right)} \end{cases}$$

Applichiamo ora la relazione fornita dal problema

$$OP + PQ = ka$$

$$\frac{a}{\cos x\left(1 + m\tan x\right)} + \frac{a\tan x}{1 + m\tan x} = ka$$

Semplificando si ottiene

$$\boxed{(3) \qquad \operatorname{sen} x\left(1 - mk\right) - k\cos x + 1 = 0}$$

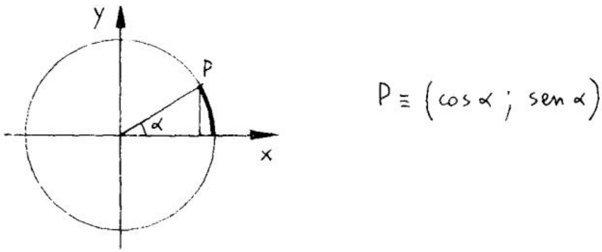
Cioè un'equazione lineare in seno e coseno con le seguenti limitazioni

$$0 \le x \le 90 \qquad\qquad k > 0 \qquad\qquad 0 < m < 1$$

Eseguiamo la discussione geometrica: consideriamo il sistema formato dalla (3) e alla relazione fondamentale della trigonometria

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x(1-mk)-k\cos x+1=0 \\ \operatorname{sen}^2 x+\cos^2=1 \end{cases}$$

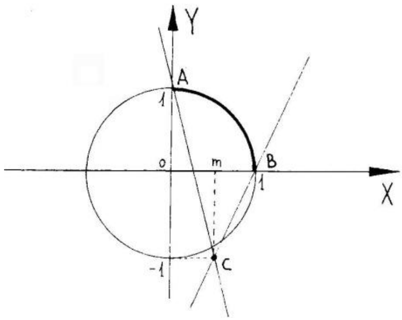
Ricordiamo che nel cerchio di raggio unitario il seno e il coseno corrispondono rispettivamente all'ordinata e all'ascissa di un estremo dell'arco avente ampiezza x. Cioè



Quindi possiamo porre

$$\begin{cases} \cos x = X \\ \operatorname{sen} x = Y \end{cases} \quad \text{ottenendo} \quad \begin{cases} Y(1-mk)-kX+1=0 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette con centro $C\equiv(m;-1)$ e una circonferenza unitaria con centro nell'origine.



L'angolo x è sottoposto alla limitazione $0\le x\le 90$ e perciò dobbiamo considerare solo l'arco di circonferenza compreso nel primo quadrante.

Imponiamo alla retta del fascio di passare per A e B.

$$A \equiv (0;1) \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{2}{m}$$

$$B \equiv (1;0) \qquad \rightarrow \qquad k = 1$$

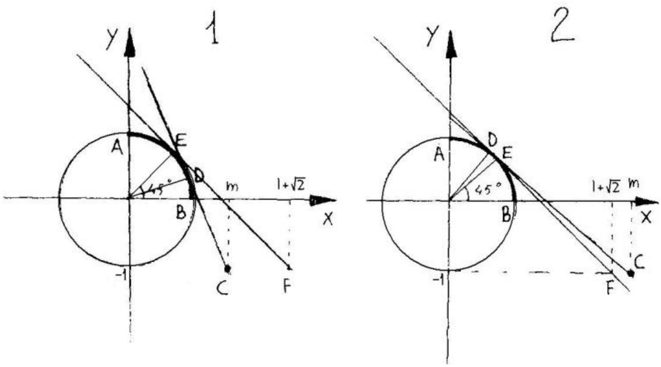
Il problema ammette quindi una sola soluzione per

$$1 \leq k \leq \frac{2}{m}$$

Osservando il triangolo AOB si può notare che

$$\tan\beta = \frac{OA}{OB} = a \cdot \frac{m}{a} = m$$

E quindi la limitazione 0 < m < 1 significa geometricamente che l'angolo β è compreso fra 0° e 45°.
Supponiamo ora m > 1 cioè β > 45°. Possiamo distinguere due casi distinti



Cioè il caso in cui il punto di tangenza D fra circonferenza e retta è al di sotto di E e il caso in cui D è al di sopra di E.
Poiché l'arco correlato con il punto E è di 45°, le coordinate di E sono

$$E \equiv (\cos 45; \operatorname{sen} 45) \qquad \rightarrow \qquad E \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

La retta passante per E e tangente alla circonferenza ha coefficiente angolare m = – 1 e quindi equazione

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-1\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \rightarrow \qquad x+y=\sqrt{2}$$

Ponendo y = – 1 si ottiene l'ascissa del punto F

$$F\equiv\left(1+\sqrt{2};-1\right)$$

Perciò facendo riferimento ai due grafici precedenti, si avrà il caso 1 o il caso 2 a seconda che m sia maggiore o minore di $1+\sqrt{2}$. In entrambi i casi il punto di tangenza D fra retta passante per C e circonferenza si verifica quando

$$\begin{cases} X=\dfrac{1+Y-mkY}{k} \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$$

$$Y^2\left(1+m^2k^2-2mk+k^2\right)-2Y\left(mk-1\right)+1-k^2=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0 \qquad \rightarrow \qquad k=\frac{2m}{1+m^2}$$

Quindi possiamo concludere affermando che quando

$$\boxed{1<m<1+\sqrt{2}}$$

Si hanno due soluzioni per $\frac{2m}{1+m^2}\le k\le 1$ ed una soluzione per $1<k\le\frac{2}{m}$.

Mentre quando

$$\boxed{m > 1+\sqrt{2}}$$

Si hanno due soluzioni per $\frac{2m}{1+m^2} \le k \le \frac{2}{m}$ ed una soluzione per $\frac{2}{m} < k \le 1$.