

Luglio 1965

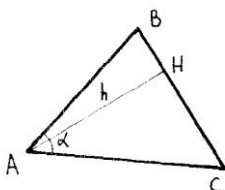
Nel triangolo ABC la proiezione HC del lato AC sulla retta BC è tripla della proiezione HB del lato AB sulla stessa retta BC.

Posto $AH = h$, $BC = x$, $\tan BAC = y$,

- 1) Si trovi la relazione che sussiste fra x e y considerando separatamente i casi in cui H risulti esterno o interno al segmento BC.**
- 2) Nel caso in cui H sia esterno al segmento BC, si rappresenti graficamente la funzione $y(x)$ dedotta dalla relazione precedente e se ne studi l'andamento.**
- 3) Si risolvano graficamente i problemi di costruzione del triangolo ABC dati due dei tre elementi BC, AH, BAC.**

Facoltativamente:

- 4) Nel caso di H esterno al segmento BC, supposto $h = \frac{1}{2}$, si calcoli l'area della superficie compresa fra la curva e la sua corda passante per i punti di ascissa $x = 0$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.**
- 5) Nel caso di H interno al segmento BC, supposto $h = \frac{1}{4}$ si rappresenti graficamente la funzione $y(x)$ dedotta dalla relazione di cui al numero 1).**



$$\overline{HC} = 3 \cdot \overline{HB}$$

$$\overline{AH} = h$$

$$\overline{BC} = x$$

$$\tan \alpha = y$$

Supponiamo dapprima che il punto H sia interno al segmento BC. Risulta

$$BH = \frac{x}{4} \quad HC = \frac{3}{4}x$$

Calcoliamo AB e AC con il teorema di Pitagora

$$AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{x^2}{16} + h^2}$$

$$AC = \sqrt{HC^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{9x^2}{16} + h^2}$$

Applichiamo ora il teorema di Carnot al triangolo ABC

$$(1) \quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

O anche, ricordando che

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$x^2 = \frac{x^2}{16} + h^2 + \frac{9x^2}{16} + h^2 - 2 \frac{\sqrt{\frac{x^2}{16} + h^2} \sqrt{\frac{9x^2}{16} + h^2}}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

Ponendo $\tan \alpha = y$ e semplificando, si ha

$$\sqrt{\frac{9x^4 + 160h^2x^2 + 256h^4}{1 + y^2}} = -3x^2 + 16h^2$$

Quadrando ambo i membri e semplificando

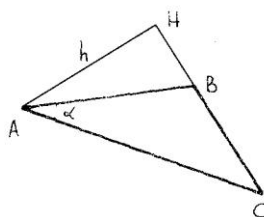
$$y^2 = \frac{256h^2 x^2}{(3x^2 - 16h^2)^2}$$

Da cui

$$y = \pm \frac{16hx}{3x^2 - 16h^2} \quad \text{o anche} \quad y = \frac{16hx}{|3x^2 - 16h^2|}$$

Che è la relazione cercata.

Supponendo invece che il punto H si trovi sul prolungamento esterno del lato BC, avremo



$$\overline{BC} = x$$

$$\overline{HC} = 3 \cdot \overline{HB}$$

$$\overline{BC} = \overline{HC} - \overline{HB} = 3 \cdot \overline{HB} - \overline{HB} = 2 \cdot \overline{HB}$$

E quindi

$$\begin{cases} \overline{HB} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{x}{2} \\ \overline{HC} = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

Analogamente al caso precedente si ha

$$\overline{AB} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + h^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\frac{9x^2}{4} + h^2}$$

E, riapplicando la (1), si ottiene

$$x^2 = \frac{x^2}{4} + h^2 + \frac{9x^2}{4} + h^2 - 2 \frac{\sqrt{\frac{x^2}{4} + h^2} \sqrt{\frac{9x^2}{4} + h^2}}{\sqrt{1+y^2}}$$

Da cui, ripetendo i passaggi, si ricava

$$y = \frac{4hx}{3x^2 + 4h^2}$$

Che è la seconda relazione cercata. Si ricordi che per ragioni geometriche deve essere sempre $h > 0$.

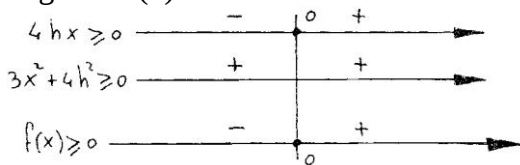
Studiamo l'andamento di quest'ultima funzione. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

La curva ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$. Non ci sono asintoti verticali o obliqui.

La curva attraversa gli assi cartesiani solo nell'origine.

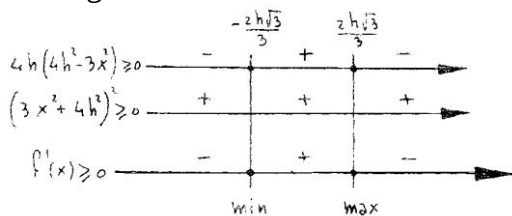
Studiamo il segno di $f(x)$



Troviamo la derivata prima

$$y' = \frac{4h(4h^2 - 3x^2)}{(3x^2 + 4h^2)^2}$$

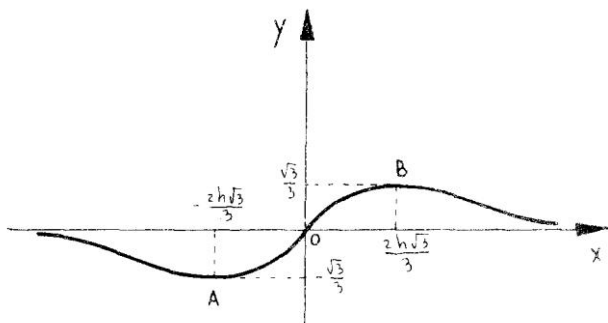
E studiamone il segno



Le ordinate corrispondenti a questi due punti caratteristici sono

$$f\left(-\frac{2h\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad f\left(\frac{2h\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

E dunque il grafico è il seguente



Si noti come la curva sia simmetrica rispetto all'origine in quanto è

$$f(x) = -f(-x)$$

La curva ha significato geometrico solo quando x , y , h sono tutti positivi.

Per valori di h sempre più grandi l'asse delle ordinate rimane invariato, mentre l'asse x subisce una dilatazione orizzontale via via maggiore.

Mantenendo costante h , la determinazione dei valori x ed y necessari per costruire il triangolo corrispondono alla scelta di un punto qualsiasi della curva nel primo quadrante.

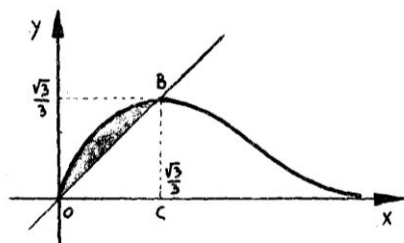
Passiamo alla parte facoltativa ponendo nella funzione $h = \frac{1}{2}$.

Il punto B viene ad assumere le coordinate $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e la

curva assume la forma

$$y = \frac{2x}{3x^2 + 1}$$

Che, limitandoci al primo quadrante, possiamo tracciare nel modo seguente



L'area del triangolo OBC è

$$S_{OBC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

E quella del trapezoide è

$$\begin{aligned} S_{OBC} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2x}{3x^2+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{6x}{3x^2+1} dx = \frac{1}{3} \left[\log(3x^2+1) \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \\ &= \frac{1}{3} (\log 4 - \log 1) = \frac{\log 4}{3} \end{aligned}$$

E quindi l'area della regione ombreggiata è

$$S = \frac{\log 4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2\log 4 - 1}{6}$$

Occupiamoci infine del grafico della funzione

$$y = \frac{16hx}{|3x^2 - 16h^2|}$$

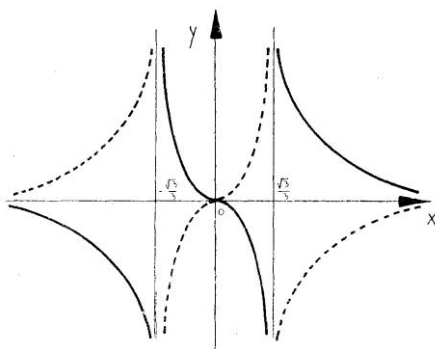
Ottenuta nel caso in cui il punto H è interno al segmento BC, ma nel caso particolare in cui sia $h = \frac{1}{4}$. Si ottengono le due funzioni

$$y = \frac{4x}{3x^2 - 1} \quad \text{e} \quad y = \frac{4x}{1 - 3x^2}$$

Che sono simmetriche rispetto all'origine in quanto è

$$f_1(x) = -f_2(-x)$$

È perciò sufficiente studiare la prima per poter poi ottenere graficamente anche la seconda.



Il tratto pieno rappresenta la prima equazione, quella tratteggiata la seconda. Ma, come detto in precedenza, hanno significato geometrico solo le loro parti appartenenti al primo quadrante. Dunque la funzione complessivamente ha il seguente andamento

