

Settembre 1965

In un riferimento cartesiano ortogonale $O(x,y)$ è data la curva di equazione

$$(1) \quad y = \frac{2mx + 1}{mx - 2}$$

Essendo m una costante reale.

- 1) Ricercare per quale traslazione degli assi l'equazione (1) assume la forma $XY = k$.**
- 2) Trovare le coordinate x e y dei punti M , N comuni alla curva e alla bisettrice del primo e terzo quadrante, individuati dagli assi Ox , Oy e determinarla lunghezza del segmento MN .**
- 3) Verificare che per qualsiasi valore del parametro m , tutte le curve di equazione (1) hanno in comune un medesimo punto C e determinare poi l'area del triangolo MNC .**
- 4) Dire per quali valori di m le rette di equazione**

$$y = \frac{mx - 2}{m} \quad y = \frac{mx - 2}{2m}$$

risultano tangenti alla corrispondente curva di equazione (1) e determinare le coordinate dei punti di contatto R , S nonché la lunghezza del segmento RS .

- 5) (Facoltativo) Fatta ruotare la curva di equazione (1) di un angolo giro attorno alla retta $y = 2$, si determini il volume del solido limitato dalla superficie che così si ottiene e dai piani perpendicolari all'asse delle x passanti per i punti**

$$\begin{cases} x_0 = \frac{2}{m} + \sqrt{\frac{5}{m}} \\ x_1 > x_0 \end{cases}$$

nell'ipotesi di m positivo.

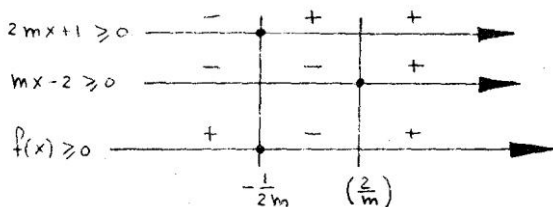
Studiamo anzitutto l'andamento della funzione

$$y = \frac{2mx + 1}{mx - 2}$$

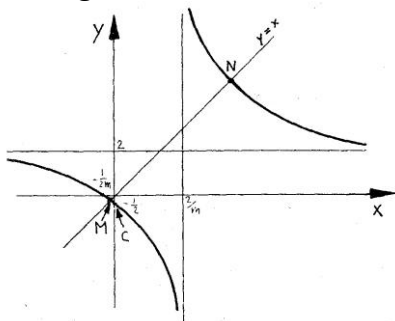
La curva ha un asintoto orizzontale $x = \frac{2}{m}$ e uno orizzontale $y = 2$ perché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$$

Studiamo il segno della $f(x)$



Quindi questo è il suo grafico



Non è necessario calcolare la derivata prima e la sua variazione del segno, perché già sappiamo trattarsi di una iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi coordinati.

La curva si trasforma nella

$$XY = k$$

Cioè in una iperbole equilatera operando una traslazione che sposti l'origine nel punto $\left(\frac{2}{m}; 2\right)$ che è il centro di simmetria della funzione (si trova calcolando l'intersezione fra i due asintoti). Applicando le formule di traslazione

$$\begin{cases} x = X + \frac{2}{m} \\ y = Y + 2 \end{cases} \quad \text{si ha} \quad XY = \frac{5}{m}$$

Torniamo alla funzione prima della traslazione. Le coordinate dei punti M ed N si trovano risolvendo il sistema formato dalla funzione e dalla retta $y = x$.

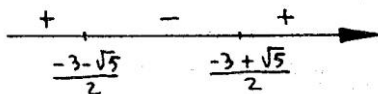
$$\begin{cases} y = \frac{2mx+1}{mx-2} \\ y = x \end{cases}$$

$$mx^2 - 2x = 2mx + 1$$

$$mx^2 - 2x(1+m) - 1 = 0$$

$$x = \frac{1+m \pm \sqrt{m^2 + 3m + 1}}{m}$$

Che corrisponde a valori reali della x quando il radicando è positivo o nullo, cioè per valori di m esterni all'intervallo



Dove entrambi i valori sono negativi. Ma deve anche essere $m > 0$ perché altrimenti k diventa negativo, l'iperbole occupa il secondo e quarto quadrante, e l'iperbole non potrebbe mai

incontrare la retta $y = x$. Allora è sufficiente porre $m > 0$ perché con questa condizione ricadiamo sempre all'esterno dell'intervallo precedente e la x è sempre reale.

Le coordinate dei punti M ed N sono in tal caso

$$M \equiv \left(\frac{1+m-\sqrt{m^2+3m+1}}{m}; \frac{1+m-\sqrt{m^2+3m+1}}{m} \right)$$

$$N \equiv \left(\frac{1+m+\sqrt{m^2+3m+1}}{m}; \frac{1+m+\sqrt{m^2+3m+1}}{m} \right)$$

E la distanza MN è

$$MN = \sqrt{2 \left(\frac{1+m+\sqrt{\Delta}}{m} - \frac{1+m-\sqrt{\Delta}}{m} \right)^2} = \frac{2}{m} \sqrt{2\Delta} =$$

$$= \frac{2}{m} \sqrt{2m^2+6m+2}$$

Passiamo ora al terzo quesito. La curva non dipende dal parametro m se si verificano condizioni tali che m scompaia dalla funzione

$$y = \frac{2mx+1}{mx-2}$$

E ciò avviene quando $x = 0$. E in corrispondenza risulta $y = -\frac{1}{2}$. Quindi la funzione passa per il punto

$$C \equiv \left(0; -\frac{1}{2} \right)$$

Qualunque sia il valore di m . Al variare di m la funzione passa sempre per il punto C.

Per calcolare l'area del triangolo MNC consideriamo come base il lato MN. Ne consegue che l'altezza coincide con la distanza del punto C dalla retta $y = x$. Tale altezza allora è

$$h = \frac{|y_0 - x_0|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

L'area del triangolo MNC è

$$S = \frac{MN \cdot h}{2} = \frac{2}{m} \sqrt{2m^2 + 6m + 2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{m^2 + 3m + 1}}{2m}$$

Passiamo al quarto quesito e imponiamo la tangenza fra la prima retta (del punto 4 del problema) e la curva

$$\begin{cases} y = \frac{mx - 2}{m} \\ y = \frac{2mx + 1}{mx - 2} \end{cases}$$

Per confronto si ha

$$(1) \quad m^2 x^2 - 2mx(2+m) + 4 - m = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad m = -5$$

Imponiamo anche la tangenza fra la seconda retta e la curva

$$\begin{cases} y = \frac{mx - 2}{2m} \\ y = \frac{2mx + 1}{mx - 2} \end{cases}$$

$$(2) \quad m^2 x^2 - 4mx(1+m) + 4 - 2m = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad m = -\frac{5}{2}$$

Calcoliamo le coordinate dei punti di contatto R e S.

La (1) con $m = -5$ diviene

$$25x^2 - 30x + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad R \equiv \left(\frac{3}{5}; 1\right)$$

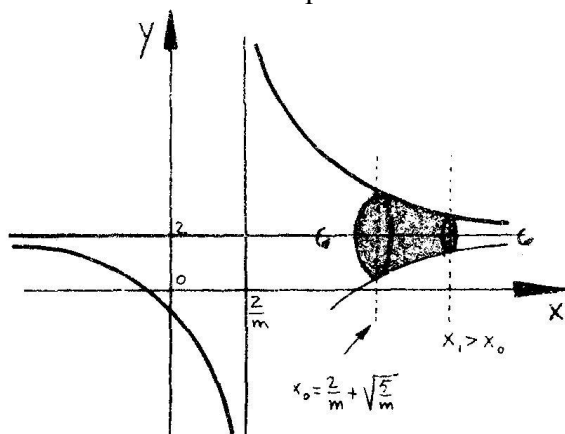
Mentre la (2) con $m = -\frac{5}{2}$ diviene

$$25x^2 - 60x + 36 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow S \equiv \left(\frac{6}{5}; 1\right)$$

La lunghezza del segmento RS è quindi

$$RS = \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{6}{5}\right)^2 + (1-1)^2} = \frac{3}{5}$$

Occupiamoci infine dell'ultimo quesito



Ci conviene riferirci alla curva traslata

$$XY = \frac{5}{m} \rightarrow Y = \frac{5}{mX}$$

Perché in tal caso l'asse di rotazione coincide con l'asse delle ascisse, e il calcolo del volume è più agevole.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{x_0}^{x_1} f'(x) dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} \frac{25}{m^2 x^2} dx = \frac{25\pi}{m^2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x^2} = \frac{25\pi}{m^2} \left[-\frac{1}{x} \right]_{x_0}^{x_1} = \\
 &= \frac{25\pi}{m^2} \left(-\frac{1}{x_1} + \frac{1}{\frac{2}{m} + \sqrt{\frac{5}{m}}} \right) = \frac{25\pi}{m^2} \left(m \frac{2 - \sqrt{5m}}{4 - 5m} - \frac{1}{x_1} \right) = \\
 &= \frac{25\pi}{m^2} \left(\frac{m}{2 + \sqrt{5m}} - \frac{1}{x_1} \right)
 \end{aligned}$$