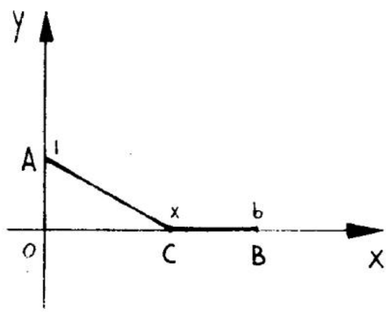
Luglio 1966

In un piano sul quale è fissato un sistema cartesiano ortogonale O(x,y) sono dati i punti A=(0;1), B=(b;0). Si determini sull'asse x un punto C tale che risulti

$$\frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$$

Discussione. Successivamente si generalizzi la questione supponendo che il predetto rapporto sia uguale ad un numero positivo assegnato k.
Ottenuta l'equazione in x che risolve il problema, si ponga x = X, k^2 = Y, si esprima Y in funzione di X e si studi l'andamento della funzione Y(X), distinguendo i casi in cui b sia maggiore o minore di uno.
Infine si utilizzi il grafico di tale funzione per determinare i valori di X corrispondenti ad un dato valore di k.
(Facoltativamente). Si determinino i risultati precedenti per via sintetica considerando il punto C come intersezione della retta x con il luogo geometrico dei punti P del piano le cui distanze BP e AP da B e da A stiano nel rapporto k.



$$BC = |b - x| \qquad AC = \sqrt{1 + x^2}$$

Applicando la relazione del testo, si ha

$$\frac{|b-x|}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{4}{3} \qquad \to \qquad 3|b-x|=4\sqrt{1+x^2}$$

Elevando al quadrato i due membri (il modulo si elimina), semplifichiamo e ordiniamo

$$7x^2+18bx+16-9b^2=0$$

$$-\infty<x<\infty$$

Non esistendo alcuna limitazione né per b né per x, vi sono sempre due soluzioni purché il discriminante dell'equazione non risulti negativo. Cioè quando

$$\frac{\Delta}{4}\geq 0 \quad \to \quad 81b^2-7\left(16-9b^2\right)\geq 0 \quad \to \quad b\geq\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Operiamo la generalizzazione indicata dal problema

$$\frac{BC}{AC}=k \qquad \to \qquad |b-x|=k\sqrt{1+x^2}$$

$$x^2\left(1-k^2\right)-2bx+b^2-k^2=0$$

$$\text{ponendo } \begin{cases} x=X \\ k^2=Y \end{cases} \text{ si ottiene } \quad X^2\left(1-Y\right)-2bX+b^2-Y=0$$

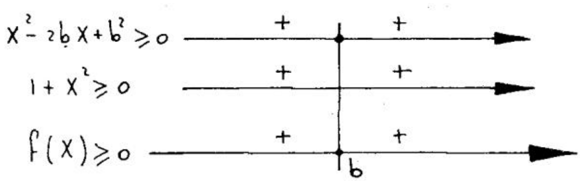
Ed esplicitando rispetto ad Y

$$\boxed{(1) \qquad Y=\frac{X^2-2bX+b^2}{1+X^2}}$$

Studiamo l'andamento della funzione. Non vi sono asintoti verticali o obliqui, ma un asintoto orizzontale Y = 1 perché

$$\lim_{X\to\infty} f(X)=1$$

Le intersezioni con gli assi sono $(0;b^2)$ e $(b;0)$. Lo studio del segno fornisce

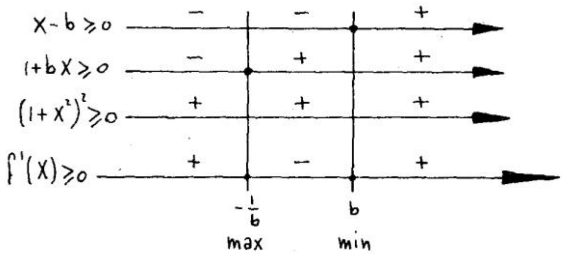


La derivata prima è

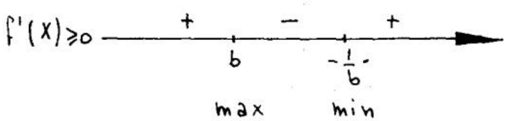
$$Y'=\frac{(2X-2b)(1+X^2)-2X(X^2-2bX+b^2)}{(1+X^2)^2}$$

$$Y'=\frac{2(X-b)(1+bX)}{(1+X^2)^2}$$

Lo studio del segno (supponendo b > 0) fornisce



Mentre nel caso in cui b < 0, si ha

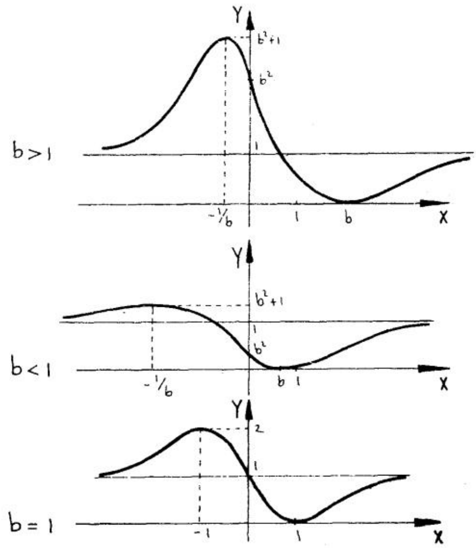


Cioè una situazione sostanzialmente identica, salovo una inversione fra b e $-\frac{1}{b}$.

Le ordinate dei punti estremanti sono

$$f(b)=0 \qquad\qquad f\left(-\frac{1}{b}\right)=1+b^2$$

Quindi si hanno rispettivamente i grafici



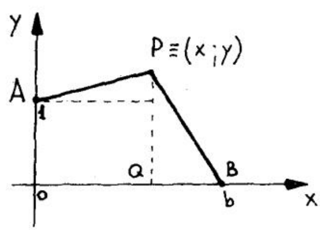
Quindi in ogni caso (tranne quando k = 1) vi sono due intersezioni fra la curva e la retta $Y = k^2$.
E precisamente due soluzioni per

$$0 \le Y \le b^2 + 1$$

Cioè per

$$0 \le k \le \sqrt{b^2 + 1}$$

Passiamo alla parte facoltativa e consideriamo un punto generico $P \equiv (x; y)$



Tale che risulti $\dfrac{BP}{AP} = k$.

Si può scrivere

$$AP = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$BP = \sqrt{(b-x)^2 + y^2}$$

Applicando la relazione del testo, si ha

$$\frac{\sqrt{(b-x)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = k$$

E, quadrando,

$$\frac{b^2 - 2bx + x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - 2y + 1} = k^2$$

Ora, come richiesto dal problema, determiniamo l'intersezione fra questo luogo e l'asse x (di equazione y = 0)

$$\begin{cases} \dfrac{b^2 - 2bx + x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - 2y + 1} = k^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Si ottiene

$$\frac{b^2 + x^2 - 2bx}{x^2 + 1} = k^2$$

Che è appunto la funzione (1) già studiata.