

Settembre 1966

In un riferimento cartesiano ortogonale $O(x,y)$ sono date le curve di equazione

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2mx + m^2(1-m) = 0$$

$$(2) \quad 2mx - y^2 - 2m^2(1-\sqrt{m}) = 0$$

Con $m > 0$.

- Considerata una retta di equazione $y = hx$, si determini la relazione fra h e m sotto la quale tale retta risulta tangente alla (1). Analoga questione si risolva per la (2).**
- Successivamente si determinino h ed m in guisa che la stessa retta risulti tangente comune alle due curve. In tal caso si calcolino le coordinate dei punti di contatto e si trovi l'area del quadrilatero convesso da essi individuato.**
- Nel caso particolare $m = 4$ si calcoli l'area della regione finita limitata dalle due curve (1) e (2).**

Applichiamo la condizione di tangenza fra la (1) e la retta $y = hx$. Eliminando la y si ottiene

$$x^2(1+h^2) - 2mx + m^2(1-m) = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow m^2 - (1+h^2)(m^2 - m^3) = 0 \rightarrow m = \frac{h^2}{1+h^2}$$

Che è la relazione cercata fra m ed h .

Analogamente, applicando la condizione di tangenza fra la (2) e la retta $y = hx$ ed eliminando la y si ottiene

$$h^2x^2 - 2mx + 2m^2(1-\sqrt{m}) = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow m^2 - 2h^2m^2(1 - \sqrt{m}) = 0 \rightarrow 1 - 2h^2(1 - \sqrt{m})$$

Che è la seconda relazione cercata fra m ed h.

Poniamo a sistema le due relazioni e risolviamo

$$\begin{cases} m = \frac{h^2}{1+h^2} \\ 1 - 2h^2(1 - \sqrt{m}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ m = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Con questi valori le (1) e (2) diventano

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{64} = 0 \\ x = 2y^2 + \frac{3}{8} \end{cases}$$

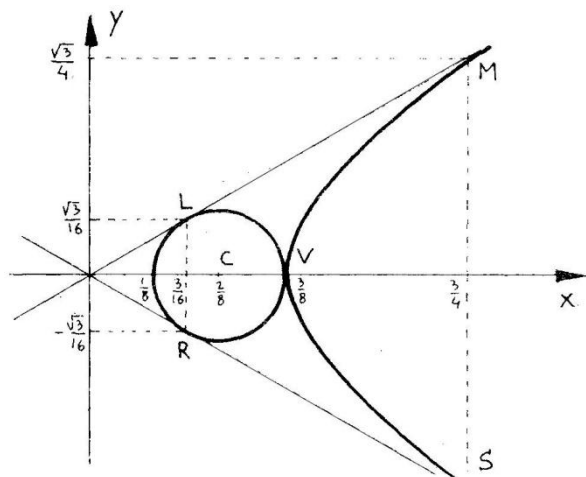
Che corrispondono ad una circonferenza con centro in $C \equiv \left(\frac{1}{4}; 0\right)$ e raggio $r = \frac{1}{8}$, ed una parabola con asse parallelo

all'asse x, concavità verso destra e vertice in $A \equiv \left(\frac{3}{8}; 0\right)$.

Risolvendo il sistema si trova che le due curve si incontrano proprio nel punto A.

Ponendo $h = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ nella retta generica $y = hx$ si nota che risultano due rette passanti per l'origine ed inclinate di 30° verso l'alto e verso il basso.

Si ottiene il grafico



Determiniamo le coordinate dei punti di contatto L, M, R, S risolvendo i sistemi

$$\begin{cases} y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ x^2 + y^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{64} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \equiv \left(\frac{3}{16}; \frac{\sqrt{3}}{16} \right) \\ R \equiv \left(\frac{3}{16}; -\frac{\sqrt{3}}{16} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ x = 2y^2 + \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \equiv \left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\ S \equiv \left(\frac{3}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{cases}$$

Calcoliamo ora la superficie del trapezio isoscele LMRS.
La sua altezza è

$$h = \frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$$

E le basi sono

$$b = LR = 2 \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$B = MS = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

E quindi

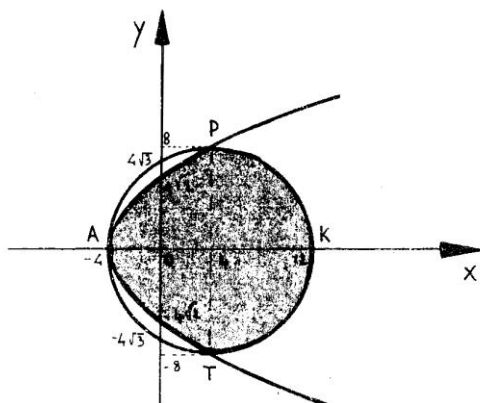
$$S = \frac{(b+B)h}{2} = \frac{45\sqrt{3}}{256}$$

Occupiamoci infine della parte facoltativa.

Poniamo $m = 4$. Le curve (1) e (2) diventano

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 48 = 0 \\ x = \frac{1}{8}y^2 - 4 \end{cases}$$

Cioè una circonferenza con centro in $C \equiv (4; 0)$ e raggio uguale ad 8, ed una parabola con vertice in $A \equiv (-4; 0)$.



Risolvendo il sistema, oltre al punto di tangenza A si trovano le coordinate di altri due punti

$$P \equiv (4; 8)$$

$$T \equiv (4; -8)$$

Ora dobbiamo calcolare l'area della regione finita limitata dalle due curve. Ma osservando il grafico si può notare che le regioni con tali requisiti sono tre. Il testo del problema contiene quindi una imprecisione che superiamo decidendo di calcolare quella con estensione maggiore, indicata con la zona ombreggiata.

Suddividiamo tale regione in due differenti zone: il triangolo ide APT e il semicerchio PKT.

Calcoliamo separatamente le superfici delle due zone per poi sommarle e trovare l'area cercata.

$$S_{\text{APT}} = 2 \int_{-4}^4 \sqrt{8x + 32} dx$$

Integriamo per sostituzione ponendo $8x + 32 = t$. Si ha $\frac{dt}{dx} = 8$

e quindi $dx = \frac{dt}{8}$. Modificando opportunamente anche gli estremi di integrazione, si ha

$$S_{\text{APT}} = 2 \int_0^{64} \sqrt{t} \frac{dt}{8} = \frac{1}{4} \frac{2}{3} \left[t\sqrt{t} \right]_0^{64} = \frac{256}{3}$$

Per il semicerchio è invece

$$S_{\text{PKT}} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{64\pi}{2} = 32\pi$$

Dunque l'area della regione ombreggiata è

$$S = 32\pi + \frac{256}{3} = 32 \left(\pi + \frac{8}{3} \right)$$