

Luglio 1967

In un piano riferito ad un sistema cartesiano ortogonale $O(x,y)$ si considerino le parabole di equazione

$$(1) \quad y = mx^2 + x + 3 - 4m$$

Essendo m un parametro diverso da zero.

- a) Si determinino le coordinate del vertice della generica parabola (1) in funzione di m . successivamente, eliminando m fra le relazioni così trovate, si studi la curva di equazione $y = f(x)$ che così si ottiene (luogo dei vertici delle parabole), e in particolare si trovino i punti A e B in cui la funzione $f(x)$ ha rispettivamente un massimo ed un minimo relativo.
- b) Si verifichi che tutte le parabole considerate passano per i punti A e B e si dia una giustificazione di ciò.
- c) Tra le parabole di equazione (1) si studino quelle aventi per vertice o A o B e si provi che esse sono fra loro simmetriche rispetto al punto medio C del segmento AB.
- d) Si calcoli l'area della regione finita limitata dalle due parabole di cui al punto c).

Calcoliamo il vertice della parabola generica della famiglia

$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) \quad \rightarrow \quad V \equiv \left(-\frac{1}{2m}; \frac{12m - 16m^2 - 1}{4m} \right)$$

Il luogo geometrico descritto dal punto V al variare di m , si trova eliminando m dal sistema seguente

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2m} \\ y = \frac{12m - 16m^2 - 1}{4m} \end{cases}$$

Ricaviamo m dalla prima e sostituiamo nella seconda

$$y = \frac{12\left(-\frac{1}{2x}\right) - 16\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 - 1}{4\left(-\frac{1}{2x}\right)} \rightarrow \boxed{y = \frac{x^2 + 6x + 4}{2x}}$$

Studiamo l'andamento della funzione

Vi è un asintoto verticale $x = 0$ e un asintoto obliquo di equazione

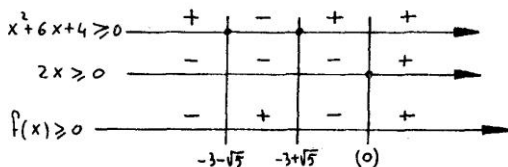
$$y = \frac{x}{2} + 3$$

Perché

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{x} = 3$$

La curva attraversa l'asse x nei punti $x = -3 \pm \sqrt{5}$.

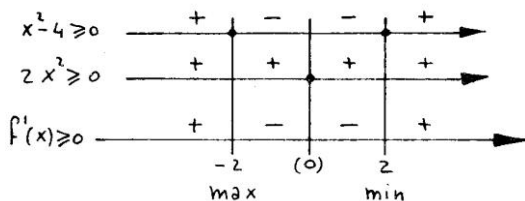
Studiamo il segno della $f(x)$



Calcoliamo la derivata prima

$$y' = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$$

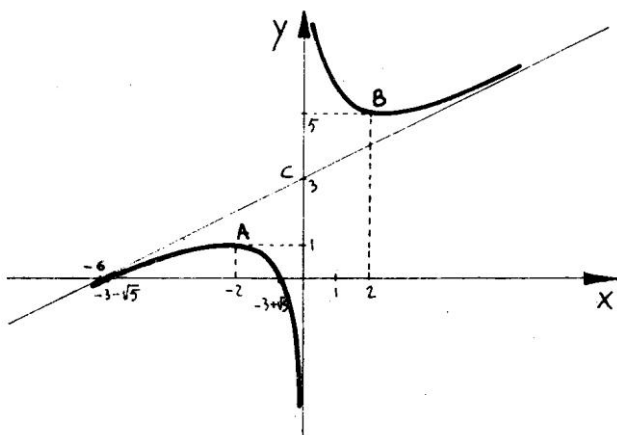
E studiamone il segno



Le coordinate dei punti caratteristici sono

$$A \equiv (-2; 1) \quad B \equiv (2; 5)$$

E il grafico conclusivo è il seguente



Che è una iperbole, come era del resto prevedibile osservando la funzione (algebraica, razionale, intera, e con un asintoto verticale ed uno obliquo).

Verifichiamo ora che la famiglia di parabole

$$y = mx^2 + x + 3 - 4m$$

passa per i punti A e B per qualunque valore del parametro m. Infatti imponendo il passaggio della famiglia per tali punti si ha rispettivamente

$$1 = 4m - 2 + 3 - 4m \rightarrow 1 = 1$$

$$5 = 4m + 2 + 3 - 4m \rightarrow 5 = 5$$

Che sono due identità quindi soddisfatte per qualunque valore di m .

Infatti partendo da una parabola generica con asse verticale

$$y = ax^2 + bx + c$$

imponiamo ad essa di passare proprio per i due punti A e B. Si ha il sistema

$$\begin{cases} 1 = 4a - 2b + c \\ 5 = 4a + 2b + c \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a “b” e “c”, si ha

$$b = 1 \qquad c = 3 - 4a$$

e l’equazione generica diviene

$$y = ax^2 + x + 3 - 4a$$

che è formalmente identica alla famiglia di parabole proposta dal testo.

Individuiamo ora nella famiglia di parabole quelle due i cui vertici coincidono con i punti A e B. Ricordando che l’ascissa

del vertice della parabola generica è $x = -\frac{1}{2m}$, basta imporre

che essa coincida con le ascisse di A e B. Cioè

$$-\frac{1}{2m} = -2 \quad \rightarrow \quad m = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2m} = 2 \quad \rightarrow \quad m = -\frac{1}{4}$$

Sostituendo tali valori di m nella famiglia di parabole si ottengono le due parabole cercate

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{4} + x + 2 \\ y &= -\frac{x^2}{4} + x + 4 \end{aligned}}$$

Proponiamoci ora di dimostrare che esse sono simmetriche rispetto al punto medio C del segmento AB, che ha coordinate

$$C \equiv (0;3)$$

Operiamo una traslazione degli assi coordinati in modo da trasportare il punto C nell'origine del nuovo riferimento. Basta porre

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + 3 \end{cases}$$

Le equazioni delle due parabole divengono

$$Y + 3 = \frac{X^2}{4} + X + 2 \quad \rightarrow \quad Y = \frac{X^2}{4} + X - 1$$

$$Y + 3 = -\frac{X^2}{4} + X + 4 \quad \rightarrow \quad Y = -\frac{X^2}{4} + X + 1$$

Ebbene, per provare l'asserto basta mostrare come queste ultime due equazioni siano curve simmetriche rispetto all'origine del nuovo sistema di riferimento (coincidente con il punto C).

Deve risultare

$$f(X) = -f(-X)$$

Ed infatti

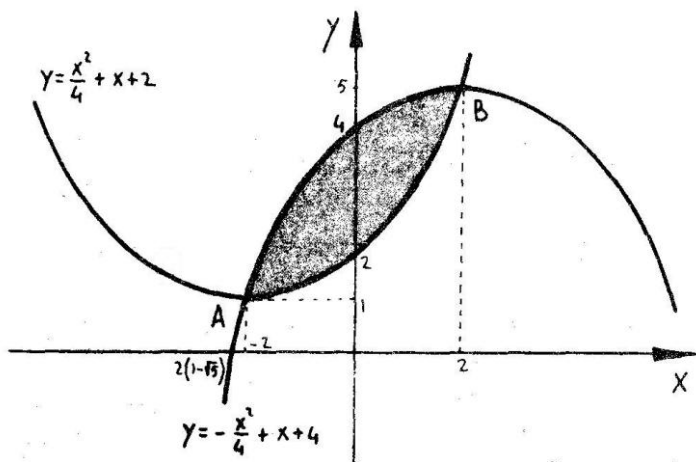
$$\frac{X^2}{4} + X - 1 = -\left(-\frac{X^2}{4} + X + 1\right)$$

è identicamente soddisfatta.

Occupiamoci infine dell'ultima richiesta del testo.

Riportiamo in un grafico le due parabole in oggetto (prima della traslazione).

Abbiamo



I due punti di intersezione fra le due parabole sono proprio i punti A e B, in quanto tutte le parabole della famiglia iniziale sono vincolate a passare per A e B, e quindi anche quelle in questione.

Calcoliamo l'area della regione ombreggiata

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^2 \left(-\frac{x^2}{4} + x + 4 \right) dx - \int_{-2}^2 \left(\frac{x^2}{4} + x + 2 \right) dx = \\
 &= \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-2}^2 - \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^2 = \\
 &= \left(-\frac{4}{3} + 16 \right) - \left(\frac{4}{3} + 8 \right) = \frac{44}{3} - \frac{28}{3} = \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$