Settembre 1967

Determinare la relazione che deve sussistere fra i due parametri k ed m affinché una delle radici dell'equazione

$$x^2 + 2(k+1)x + m^2k^2 = 0$$

sia doppia dell'altra.

Nel caso $m=\sqrt{2}$**, dalla relazione così trovata si determini il valore di k e si studi la parabola di equazione**

$$y = x^2 + 2(k+1)x + m^2k^2$$

dove m e k hanno i predetti valori particolari.

Considerata la retta di equazione $y=-\frac{3}{4}$ **e detti A e B i suoi punti di intersezione con la parabola, si scriva l'equazione della circonferenza passante per essi e ivi tangente alla parabola stessa. Si verifichi infine che detto C il centro della circonferenza, l'angolo ACB è retto.**

Le soluzioni della

$$x^2 + 2(k+1)x + m^2k^2 = 0$$

$$x_{1,2}=-(k+1)\pm\sqrt{(k+1)^2-m^2k^2}$$

Le due soluzioni sono una doppia dell'altra quando $x_2 = 2x_1$, cioè

$$-(k+1)+\sqrt{(k+1)^2-m^2k^2}=2\left[-(k+1)-\sqrt{(k+1)^2-m^2k^2}\right]$$

$$k+1=-3\sqrt{(k+1)^2-m^2k^2}$$

Elevando al quadrato entrambi i membri e semplificando, si ha

$$k^2\left(9m^2-8\right)-16k-8=0$$

Che è la relazione cercata. Poniamo ora $m = \sqrt{2}$ e calcoliamo k

$$5k^2 - 8k - 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{5} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -\dfrac{2}{5} \end{array} \right.$$

Sostituendo questi valori di m e di k nella parabola generica, si ottengono le due parabole

$$\begin{cases} m = \sqrt{2} \\ k = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y = x^2 + 6x + 8$$

$$\begin{cases} m = \sqrt{2} \\ k = -\dfrac{2}{5} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y = x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{8}{25}$$

Ma è facile appurare che solo la prima parabola taglia la retta $y = -\frac{3}{4}$ e le sue intersezioni sono

$$A \equiv \left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4} \right) \qquad\qquad B \equiv \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{4} \right)$$

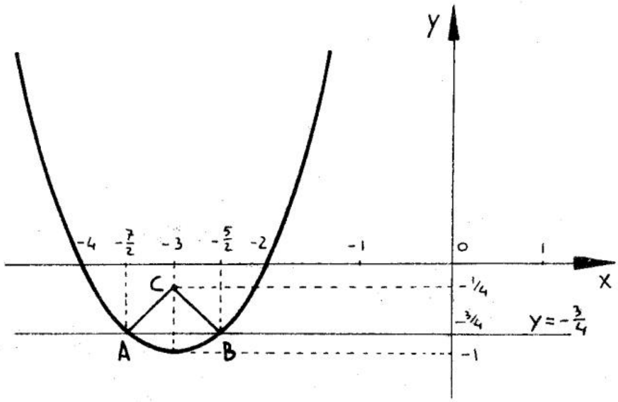
Le coordinate del vertice sono

$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) \qquad \rightarrow \qquad V \equiv (-3; -1)$$

E le intersezioni con gli assi

$$(0;8) \qquad (-2;0) \qquad (-4;0)$$

Dunque la nostra parabola e la retta corrispondono al grafico seguente (il punto C che appare nel grafico verrà calcolato di seguito ed è il centro della circonferenza tangente alla parabola)



Ricerchiamo ora la circonferenza tangente alla parabola nei punti A e B. L'equazione generica di una circonferenza è

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

Imponiamo che passi per i punti A e B: si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{49}{4}+\frac{9}{16}-\frac{7}{2}a-\frac{3}{4}b+c=0 \\ \frac{25}{4}+\frac{9}{16}-\frac{5}{2}a-\frac{3}{4}b+c=0 \end{cases}$$

Cioè

$$\begin{cases} 56a+12b-16c=205 \\ 40a+12b-16c=109 \end{cases}$$

Risolvendo rispetto ad "a" e "c" si ricava

$$\begin{cases} a=6 \\ c=\frac{12b+131}{16} \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nell'equazione generica e semplificando, si ha

$$16x^2+16y^2+96x+16by+12b+131=0$$

Per eliminare anche il parametro “b” dovremmo mettere a sistema questa equazione con la parabola, ottenendo però un’equazione di quarto grado.
Conviene seguire una via diversa.
Derivando l’equazione della parabola si ottiene $y' = 2x + 6$ che nel punto B fornisce il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola

$$f'\left(-\frac{5}{2}\right) = 1$$

E quindi il coefficiente angolare della retta passante per B e normale alla parabola, è $m = -1$ (antireciproco di 1).
Detta retta ha allora equazione

$$y + \frac{3}{4} = -1\left(x + \frac{5}{2}\right) \qquad \to \qquad y = -x - \frac{13}{4}$$

Il centro della circonferenza tangente alla parabola deve trovarsi su questa retta, ma deve trovarsi anche sull’asse della parabola (per ragioni di simmetria). Dunque per determinare il centro C basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = -x - \dfrac{13}{4} \\ x = -3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C \equiv \left(-3; -\frac{1}{4}\right)$$

E l’equazione della circonferenza diviene

$$\boxed{16x^2 + 16y^2 + 96x + 8y + 137 = 0}$$

Infine basta osservare che i coefficienti angolari delle rette passanti per A e B e tangenti alla parabola (e alla circonferenza) hanno coefficienti angolari $m = \pm 1$ e dunque l’angolo ACB è retto.