Luglio 1968

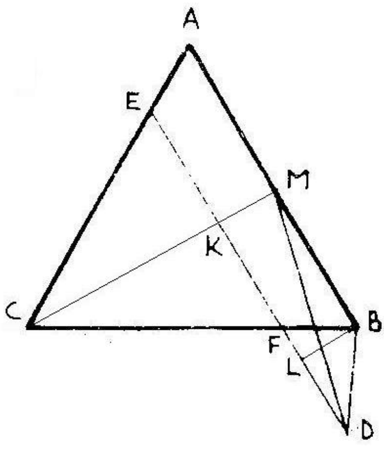
Sia ABC un triangolo equilatero di lato a ed E un punto generico del lato AC. Condotta da E la parallela ad AB ed indicata con F la sua intersezione con BC, si denoti con D il punto del prolungamento di EF, dalla parte di F, tale che sia $FD = \frac{EF}{3}$ **. Si determini il punto E in guisa che si abbia**

$$MD^2 + BD^2 = ka^2$$

Essendo M il punto medio di AB e k un numero reale dato.
Si accerti poi per quali valori di k il trapezio ABDE risulti

1) **Rettangolo.**
2) **O isoscele.**
3) **O parallelogrammo.**

Facoltativamente: Si generalizzi la questione supponendo che il punto E stia sulla "retta" AC, nel qual caso si consiglia di ricorrere ai luoghi geometrici ai quali deve appartenere il punto D per soddisfare alle condizioni assegnate.



Poniamo $CE = EF = CF = x$

Conoscendo il lato a di un triangolo equilatero, la sua altezza è

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Quindi risulta

$$\begin{cases} CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ CK = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

E perciò

$$MK = BL = CM - CK = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x)$$

Calcoliamo KD e LD

$$KD = \frac{EF}{2} + FD = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$$

Essendo il triangolo FLB simile al triangolo BMC (triangoli rettangoli con due cateti rispettivamente perpendicolari fra loro), è anch'esso mezzo triangolo equilatero e perciò

$$FL = \frac{FB}{2} = \frac{a - x}{2}$$

Quindi

$$LD = FD - FL = \frac{x}{2} - \frac{2x - a}{2}$$

Applicando ora il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli MKD e BLD, ci ricaviamo le ipotenuse MD e BD.

$$MD^2 = MK^2 + KD^2 = \frac{3}{4}(a - x)^2 + x^2 = \frac{7x^2 - 6ax + 3a^2}{4}$$

$$BD^2 = MK^2 + LD^2 = \frac{3}{4}(a - x)^2 + \frac{(2x - a)^2}{4} = \frac{7x^2 - 10ax + 4a^2}{4}$$

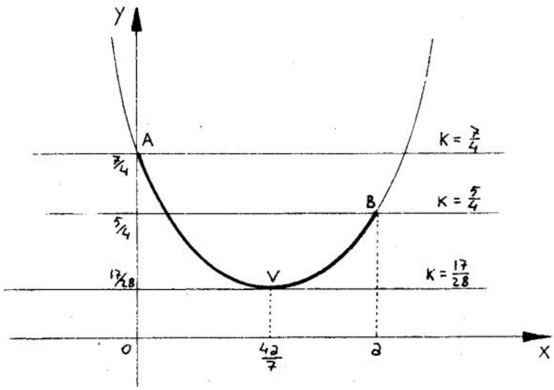
Ed, applicando la relazione fornita dal problema,

$$\frac{7x^2-6ax+3a^2}{4}+\frac{7x^2-10ax+4a^2}{4}=ka^2$$

Cioè

$$\boxed{\begin{array}{ll} 14x^2-16ax+7a^2-4ka^2=0 & \\ 0\le x\le a & a>0,k>0 \end{array}}$$

Discutiamo geometricamente l'equazione ponendo k = y. Si ottiene un fascio di rette parallele all'asse x e una parabola con asse verticale e concavità verso l'alto.



$$\begin{cases} y=k \\ y=\dfrac{7}{2a^2}x^2-\dfrac{4}{a}x+\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Il vertice della parabola ha coordinate

$$V\equiv\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)\qquad\rightarrow\qquad V\equiv\left(\frac{4a}{7};\frac{11}{28}\right)$$

E taglia gli assi solo nel punto $A\equiv\left(0;\dfrac{7}{4}\right)$

L'incognita x deve essere compresa fra 0 ed a, e con tali ascisse le corrispondenti ordinate sono rispettivamente $\dfrac{7}{4}$ e $\dfrac{5}{4}$.

Dunque dovremo tener conto solo dell'arco utile della parabola, tracciato nella figura in modo più marcato.
Al variare di k si avrà

$$2\ \text{soluz.coincidenti} \quad \rightarrow \quad k = \frac{17}{28}$$

$$2\ \text{soluz.distinte} \quad \rightarrow \quad \frac{17}{28} < k < \frac{5}{4}$$

$$1\ \text{sol. normale e } 1\ \text{sol. limite} \quad \rightarrow \quad k = \frac{5}{4}$$

$$1\ \text{sol. normale} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{4} < k < \frac{7}{4}$$

$$1\ \text{sol. limite} \quad \rightarrow \quad k = \frac{7}{4}$$

Passiamo ora alla determinazione di quei valori del parametro k che soddisfano le richieste del testo.
Il trapezio ABDE diventa rettangolo quando

$$LD = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2x - a}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{a}{2}$$

Sostituendo questo valore nella parabola si ottiene

$$y = \frac{7}{2a^2}\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a}\frac{a}{2} + \frac{7}{4} = \frac{5}{8}$$

Quindi il trapezio diventa rettangolo quando $k = \frac{5}{8}$.

Il trapezio diventa invece isoscele quando

$$FD = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

Sostituendo questo valore nella parabola si ha

$$y = 0 + 0 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$$

Quindi $k = \frac{7}{4}$.

Infine il trapezio diviene un parallelogramma quando

$$ED = AB \quad \to \quad EF + FL + LD = AB$$

$$x + \frac{a-x}{2} + \frac{2x-a}{2} = a \quad \to \quad x = \frac{2a}{3}$$

Sostituendo questo valore nella parabola si ha

$$y = \frac{7}{2a^2}\frac{4a^2}{9} - \frac{4}{a}\frac{2a}{3} + \frac{7}{4} = \frac{23}{36}$$

Quindi $k = \frac{23}{36}$.

Riguardo infine la generalizzazione della discussione nel caso in cui il punto E stia sulla "retta" AC (indifferentemente sul prolungamento dalla parte di A o dalla parte di C), grazie alla discussione geometrica da noi adottata, non vi è alcun bisogno di ricorrere ai luoghi geometrici come consiglia il testo, ma è sufficiente considerare la x variabile da più a meno infinito, invece che fra a e zero.

Ciò implica come conseguenza che dovremo prendere in considerazione non solo l'arco utile, ma l'intera parabola.

Quindi possiamo concludere che vi sono due soluzioni reali e coincidenti per $k = \frac{17}{28}$ e due soluzioni reali e distinte per $k > \frac{17}{28}$.

Per l'interpretazione dei risultati occorre tener presente che soluzioni positive maggiori di a corrispondono a situazioni geometriche in cui il punto E si trova sul prolungamento della retta AC dalla parte di A.

Mentre le soluzioni negative corrispondono a situazioni geometriche in cui il punto E si trova sul prolungamento della retta AC dalla parte di C