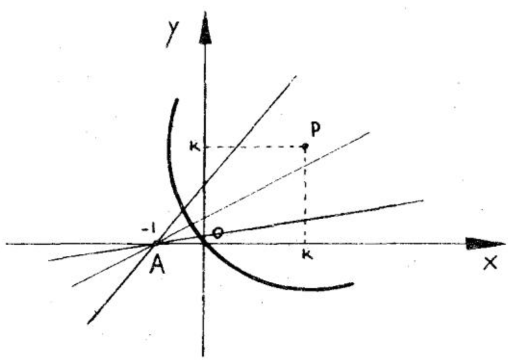
Settembre 1968

In un piano riferito ad un sistema cartesiano ortogonale, siano dati un punto $P \equiv (k;k)$ **ed una retta r passante per il punto** $A \equiv (-1;0)$**.**
Si scriva l'equazione della circonferenza di centro P passante per l'origine O del sistema di riferimento e si determinino le coordinate dei punti di intersezione con la retta r.
Si calcolino poi le coordinate dei punti P per i quali la circonferenza risulta tangente alla prefissata retta r e, successivamente, si esaminino i casi particolari in cui il coefficiente angolare di r sia uguale ad uno, oppure a zero, o tenda all'infinito.

L'equazione generica di una circonferenza è

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$



e nel nostro caso avremo

$$\alpha = \beta = k \qquad\qquad r = OP = k\sqrt{2}$$

Quindi la circonferenza cercata è

$$x^2 + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 + k^2 - 2k^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2kx - 2ky = 0$$

L'equazione del fascio di rette passanti per A è

$$y = m\left(x+1\right)$$

Le coordinate dei punti di intersezione fra circonferenza e retta generica del fascio si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2kx - 2ky = 0 \\ y = mx + m \end{cases}$$

Eseguendo i calcoli si ottiene

$$\begin{cases} x = \dfrac{k + km - m^2 \pm \sqrt{\left(k + km - m^2\right)^2 - \left(1+m^2\right)\left(m^2 - 2km\right)}}{1+m^2} \\ y = \dfrac{mk + km^2 + m \pm m\sqrt{\left(k + km - m^2\right)^2 - \left(1+m^2\right)\left(m^2 - 2km\right)}}{1+m^2} \end{cases}$$

La retta generica del fascio risulta tangente alla circonferenza quando i due radicali si annullano, cioè quando

$$\left(k + km - m^2\right)^2 - \left(1+m^2\right)\left(m^2 - 2km\right) = 0$$

E, risolvendo rispetto a k

$$k^2\left(1+m\right)^2 - 2km\left(m-1\right) - m^2 = 0$$

$$k = \frac{m\left(m-1\right) \pm \sqrt{m^2\left(m-1\right)^2 + m^2\left(1+m\right)^2}}{\left(1+m\right)^2}$$

$$k = \frac{m\left(m-1\right) \pm m\sqrt{2\left(m^2+1\right)^2}}{\left(1+m\right)^2}$$

Ricerchiamo infine quei valori di k per i quali il coefficiente angolare m della retta generica passante per A risulta rispettivamente uguale a uno, zero e infinito.
Basta, a tale scopo, calcolare i limiti dell'espressione precedente per m tendente a tali valori

$$\lim_{m\to 1}\frac{m(m-1)\pm m\sqrt{2\left(m^2+1\right)^2}}{(1+m)^2}=\pm\frac{1}{2}$$

$$\lim_{m\to 0}\frac{m(m-1)\pm m\sqrt{2\left(m^2+1\right)^2}}{(1+m)^2}=0$$

Con il terzo limite si ottiene la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ che può essere eliminata senza applicare il teorema de l'Hospital, dividendo numeratore e denominatore per m^2

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1-\frac{1}{m}\pm\sqrt{2+\frac{2}{m^2}}}{1+\frac{2}{m}+\frac{1}{m^2}}=1\pm\sqrt{2}$$

Quindi le tre condizioni imposte si ottengono quando

$$k=\pm\frac{1}{2}\qquad k=0\qquad k=1\pm\sqrt{2}$$