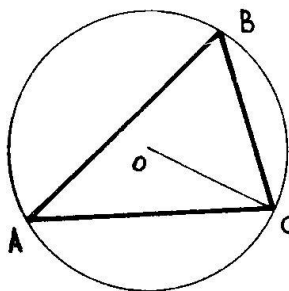


Luglio 1969

Le lunghezze dei lati BC , CA , AB di un triangolo ABC sono rispettivamente $2a$, $s - x$, $s + x$, essendo a ed s elementi dati. Si esprimano per mezzo dei lati e di x l'area del triangolo ed il raggio R del cerchio ad esso circoscritto (si ricordi che la lunghezza del raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo è un quarto del rapporto fra il prodotto delle lunghezze dei lati e l'area).

Indi si studi l'andamento della funzione $R^2(x)$, indicando in particolare gli intervalli nei quali essa è crescente o decrescente.



$$BC = 2a, \quad AC = s - x, \quad AB = s + x$$

Poiché per evidenti ragioni geometriche il segmento BC deve essere positivo, ne deriva per a la limitazione $a > 0$.

Inoltre, sappiamo che in ogni triangolo un lato deve essere sempre minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. Applicando queste limitazioni al triangolo ABC , si ottiene

$$BC < AB + AC \quad \rightarrow \quad s > a$$

$$BC > |AB - AC| \quad \rightarrow \quad x < a$$

$$AC < AB + BC \quad \rightarrow \quad x > -a$$

Riassumendo, i parametri del problema sono sottoposti alle seguenti limitazioni

$$(1) \quad s > a > 0 \quad -a < x < a$$

Passiamo ora alla determinazione del perimetro del triangolo

$$2p = 2a + (s - x) + (s + x) = 2a + 2s$$

Quindi il semiperimetro è

$$p = a + s$$

Quindi l'area del triangolo, applicando la formula di Erone, è

$$\begin{aligned} S(x) &= \sqrt{p(p - BC)(p - AC)(p - AB)} = \\ &= \sqrt{(a + s)(a + s - 2a)(a + s - s + x)(a + s - s - x)} = \\ &= \sqrt{(s^2 - a^2)(a^2 - x^2)} \end{aligned}$$

Passiamo a determinare il raggio della circonferenza circoscritta

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S}$$

$$R(x) = \frac{2a(s + x)(s - x)}{4\sqrt{(s^2 - a^2)(a^2 - x^2)}} = \frac{a(s^2 - x^2)}{2\sqrt{(s^2 - a^2)(a^2 - x^2)}}$$

Il quadrato di tale raggio è

$$R^2(x) = \frac{a^2(s^2 - x^2)^2}{4(s^2 - a^2)(a^2 - x^2)}$$

Dobbiamo ora studiare l'andamento della funzione

$$(2) \quad y = \frac{a^2 (s^2 - x^2)^2}{4(s^2 - a^2)(a^2 - x^2)}$$

La curva è simmetrica rispetto all'asse y perché

$$f(x) = f(-x)$$

Ha due asintoti verticali di equazione $x = \pm a$ poiché

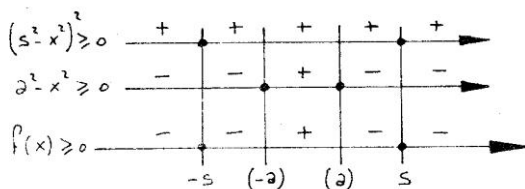
$$\lim_{x \rightarrow \pm a} f(x) = \infty$$

Non vi sono asintoti orizzontali o obliqui (perché il numeratore è di quarto grado, mentre il denominatore è di secondo).

Le intersezioni con gli assi hanno coordinate

$$\left(0; \frac{s^4}{4(s^2 - a^2)}\right) \quad (s; 0) \quad (-s; 0)$$

Dove l'ordinata del primo punto è positiva perché $s > a$. Dallo studio del segno di $f(x)$ si ottiene



La derivata prima è

$$(3) \quad y' = \frac{a^2 x (s^2 - x^2) (x^2 - 2a^2 + s^2)}{2(s^2 - a^2)(a^2 - x^2)^2}$$

La parentesi $(x^2 - 2a^2 + s^2)$ è sempre positiva per valori di x esterni all'intervallo $x = \pm \sqrt{2a^2 - s^2}$. Ma queste due radici sono interne o esterne all'intervallo $-s, s$?

Per determinarlo apriamo una breve parentesi: dalla (1) sappiamo che $a < s$. Con alcuni semplici passaggi possiamo ricavare che

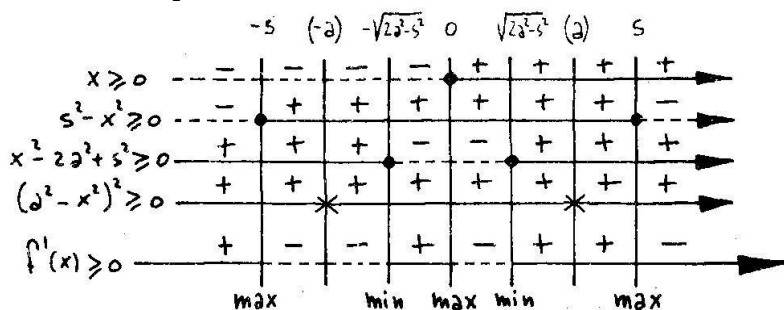
$$a^2 < s^2 \quad \rightarrow \quad -a^2 > -s^2$$

e, aggiungendo $2a^2$ ad entrambi i membri, si ottiene

$$2a^2 - a^2 > 2a^2 - s^2 \quad \rightarrow \quad a^2 > 2a^2 - s^2 \quad \rightarrow \quad a > \sqrt{2a^2 - s^2}$$

Quindi le radici $\pm\sqrt{2a^2 - s^2}$ sono interne all'intervallo $-s, s$.

Lo studio del segno della (3), ordinati i valori in base alle considerazioni precedenti, è



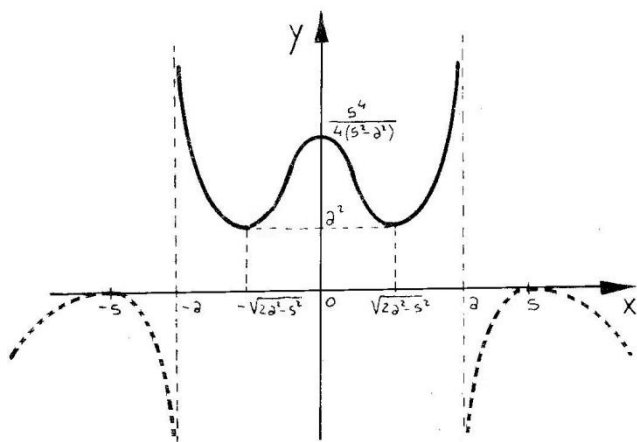
Dove i valori a e $-a$ sono stati messi fra parentesi in quanto valori della x in corrispondenza dei quali la funzione y' non si annulla ma diviene infinita.

Inoltre abbiamo indicato con un pallino i valori della x in corrispondenza dei quali la y' diventa nulla (questi punti sono detti ZERI della funzione), ed abbiamo indicato con una croce i valori della x in corrispondenza dei quali la y' diventa infinita (questi punti sono detti POLI della funzione).

Le ordinate dei massimi e minimi sono

$$f(0) = \frac{s^4}{4(s^2 - a^2)} \quad f(\pm\sqrt{2a^2 - s^2}) = a^2 \quad f(\pm s) = 0$$

Il grafico della funzione è allora il seguente



Dove ha significato geometrico solo il tratto compreso fra a e $-a$, a causa delle limitazioni (1).