

Luglio 1970

Verificare che le due curve piane, grafici cartesiani delle funzioni

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

Hanno due punti in comune. Indicare l'andamento dei predetti grafici cercandone in particolare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativi.

Determinare l'area della regione piana limitata dai due archi dei grafici aventi per estremi i due punti comuni.

Considerate poi le tangenti ai due grafici nei punti comuni calcolare l'area del quadrilatero convesso da esse determinato.

Per trovare le coordinate dei punti di intersezione, risolviamo il sistema formato dalle equazioni delle due curve

$$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \end{cases}$$

Con semplici calcoli si ottiene

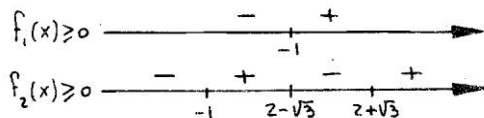
$$A \equiv (-1; 0) \qquad B \equiv (0; 1)$$

Passiamo ora alla determinazione dei due grafici. Poiché entrambi i polinomi a secondo membro, uguagliati a zero, costituiscono delle equazioni reciproche di terzo grado prima specie, essi possono essere divisi per $(x + 1)$ con il metodo di Ruffini. Si ottengono così due equazioni in forma fattorizzata di facile soluzione.

$$(x+1)(x^2+2x+1)=0 \quad \rightarrow \quad x=-1$$

$$(x+1)(x^2-4x+1)=0 \quad \rightarrow \quad x=-1; x=2 \pm \sqrt{3}$$

Studiando il segno delle due funzioni si ha

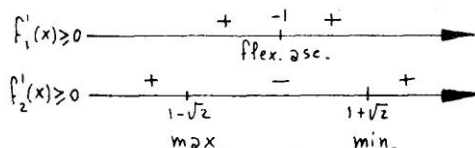


Non vi sono asintoti di alcun tipo. Le derivate prime sono

$$f'_1(x) = 3x^2 + 6x + 3$$

$$f'_2(x) = 3x^2 - 6x - 3$$

E dallo studio del segno si ricava



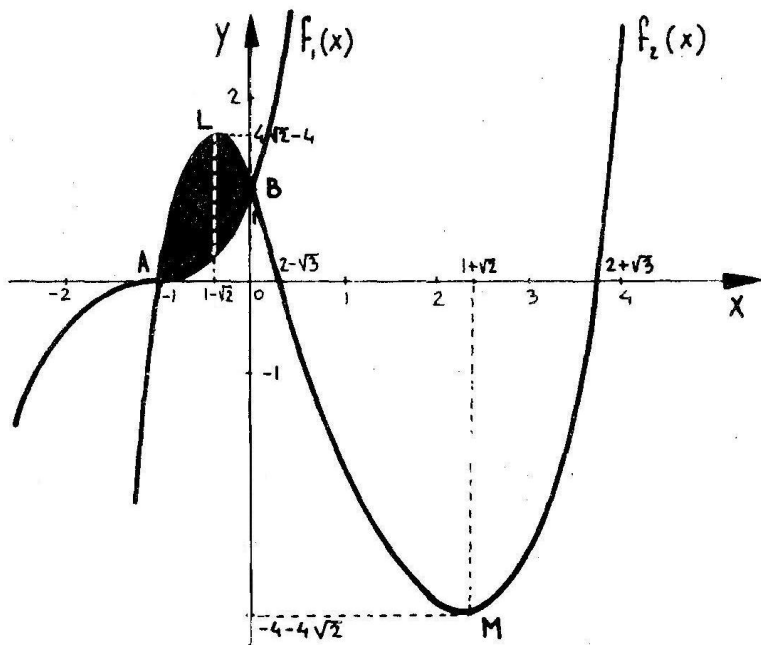
Quindi la $f'_1(x)$ ha un flesso orizzontale ascendente per $x = 1$, mentre $f'_2(x)$ ha una massimo per $x = 1 - \sqrt{2}$ e un minimo per $x = 1 + \sqrt{2}$. Le coordinate di tali punti sono

$$A \equiv (-1; 0)$$

$$L \equiv (1 - \sqrt{2}; 4\sqrt{2} - 4)$$

$$M \equiv (1 + \sqrt{2}; -4\sqrt{2} - 4)$$

Il grafico conclusivo con l'andamento delle due curve è il seguente



Calcoliamo la superficie della regione ombreggiata

$$S = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x^2 - 3x + 1) dx - \int_{-1}^0 (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) dx =$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$$

Determiniamo ora le equazioni delle rette tangenti alle curve nei punti A e B. I coefficienti angolari di tali rette sono

$$f_1'(0) = 3 \quad f_1'(-1) = 0 \quad f_2'(0) = -3 \quad f_2'(-1) = 6$$

Dal fascio di rette con centro $A \equiv (-1; 0) \Rightarrow y = m(x+1)$

si ottengono le due rette tangenti passanti per A

$$y = 0(x+1) \rightarrow y = 0$$

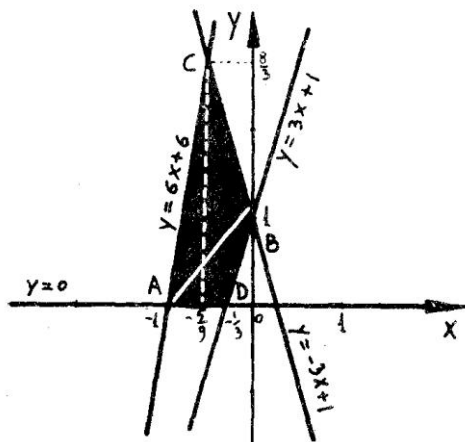
$$y = 6(x+1) \rightarrow y = 6x + 6$$

Dal fascio di rette con centro $B \equiv (0;1) \Rightarrow y-1=mx$
 si ottengono le due rette tangenti passanti per B

$$y-1=3x \quad \rightarrow \quad y=3x+1$$

$$y-1=-3x \quad \rightarrow \quad y=-3x+1$$

Tralasciando (per chiarezza) le due curve le quattro rette sono disposte nel modo seguente



Oltre ai punti A e B già noti, calcoliamo le coordinate degli altri due punti di incontro C e D

$$\begin{cases} y=6x+6 \\ y=-3x+1 \end{cases} \Rightarrow C \equiv \left(-\frac{5}{9}; \frac{8}{3} \right)$$

$$\begin{cases} y=3x+1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow D \equiv \left(-\frac{1}{3}; 0 \right)$$

I quattro punti A, B, C, D individuano il quadrilatero ombreggiato di cui dobbiamo calcolare la superficie.

Esso può essere scomposto nei due triangoli ABC e ABD.

La distanza del punto B dalla retta AC è

$$d = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{|1-6|}{\sqrt{1+36}} = \frac{5}{\sqrt{37}} = \frac{5\sqrt{37}}{37}$$

La lunghezza del segmento AC è

$$AC = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{37}}{9}$$

Quindi la superficie del triangolo ABC è

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot d}{2} = \frac{5\sqrt{37}}{37} \cdot \frac{4\sqrt{37}}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{9}$$

E quella del triangolo ABD è

$$S_{ABD} = \frac{AD \cdot OB}{2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 1}{2} = \frac{1}{3}$$

E dunque la superficie del quadrilatero è

$$S = S_{ABC} + S_{ABD} = \frac{10}{9} + \frac{1}{3} = \frac{13}{9}$$