# Luglio 1970 – Sessione suppletiva

**Si trovino i coefficienti della funzione**

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

**sapendo che:**

1) **Essa si annulla per x = 0**
2) **La sua derivata prima si annulla per x = 0, x = 1, x = 2**
3) **Il suo grafico, in un riferimento cartesiano ortogonale O(x,y) ha nel punto di ascissa x = – 1, la tangente parallela ala retta di equazione y = – x.**

**Si descriva l'andamento del grafico. Infine si determini l'area del rettangoloide, relativo al grafico, avente per base l'intervallo di estremi x = 0 e x = 2.**

Imponendo il passaggio della funzione per il punto (0;0) si ottiene

$$e = 0$$

la derivata prima della funzione è

$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Imponendo il passaggio per i punti (0;0), (1;0) e (2;0) si ottiene

$$d = 0$$

e il sistema

$$\begin{cases} 4a + 3b + 2c = 0 \\ 32a + 12b + 4c = 0 \end{cases}$$

Che, essendo costituito da due equazioni con tre incognite, può essere risolto calcolando due incognite in funzione della terza. Facendo i calcoli si ha

$$\begin{cases} b = -4a \\ c = 4a \end{cases}$$

Quindi, con le condizioni finora imposte all’equazione generica, questa può essere scritta nella forma seguente

$$y = ax^4 - 4ax^3 + 4ax^2$$

E la derivata

$$y' = 4ax^3 - 12ax^2 + 8ax$$

Per eliminare anche il parametro a imponiamo la terza condizione fornita dal testo

$$f'(-1) = -4a - 12a - 8a = -1 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{24}$$

La curva cercata ha perciò equazione

$$\boxed{y = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6}}$$

Studiamone il grafico

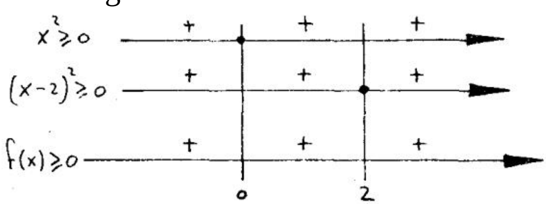
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$$

Non vi sono asintoti di alcun tipo e le intersezioni con gli assi sono (0;0) e (2;0).

La funzione può anche essere scritta

$$y = \frac{x^2}{24}\left(x^2 - 4x + 4\right)$$

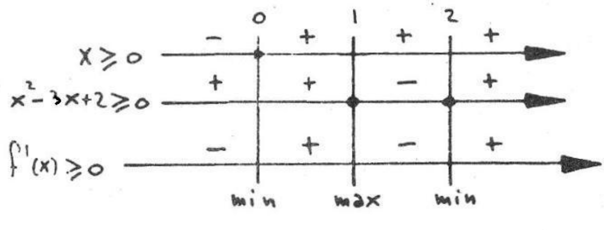
E studiandone il segno si ottiene




La derivata prima è

$$y' = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \qquad \to \qquad y' = \frac{x}{6}\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

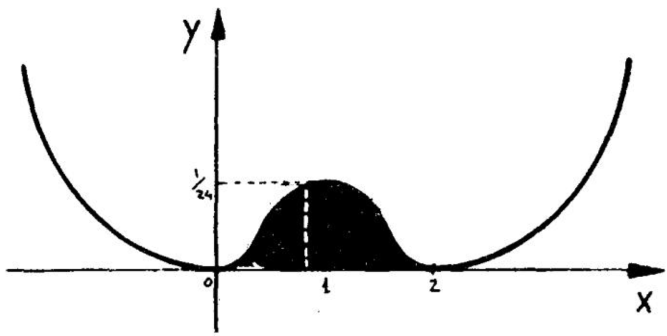
E, studiandone il segno,




Le ordinate dei punti estremanti sono

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = \frac{1}{24} \qquad f(2) = 0$$

Quindi il grafico è




E l'area della regione ombreggiata è

$$S = \int_0^2 \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} \right) dx = \left[ \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{18} \right]_0^2 = \frac{2}{45}$$