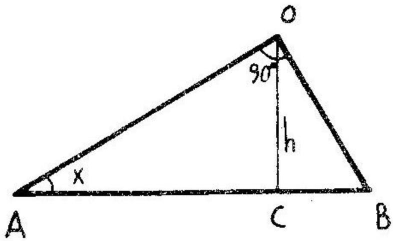
Luglio 1971 – Primo problema

E' dato il triangolo AOB rettangolo in O, del quale sia h l'altezza relativa all'ipotenusa. Detta x l'ampiezza dell'angolo OAB e posto $\tan\frac{x}{2} = t$**, si esprima per mezzo di h e di t l'andamento della funzione di t così ottenuta.**



Si ha

$$\frac{OC}{AO} = \operatorname{sen} x \quad \rightarrow \quad AO = \frac{h}{\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{AO}{AB} = \cos x \quad \rightarrow \quad AB = \frac{AO}{\cos x} = \frac{h}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

$$\frac{OB}{AO} = \tan x \quad \rightarrow \quad OB = AO \tan x = \frac{h}{\cos x}$$

Quindi, indicando con y il perimetro del triangolo, si ottiene

$$y = \frac{h}{\operatorname{sen} x} + \frac{h}{\operatorname{sen} x \cos x} + \frac{h}{\cos x}$$

$$y = h \frac{\cos x + 1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

Impiegando le formule dell'arco metà, esprimiamo ora il secondo membro in funzione di $\tan\frac{x}{2}$

$$y = h\,\frac{\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+1+\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$$

E cioè, applicando la sostituzione suggerita dal testo,

$$y = h\,\frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1+\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Semplificando si ricava

$$\boxed{y = h\,\frac{1+t^2}{t(1-t)}}$$

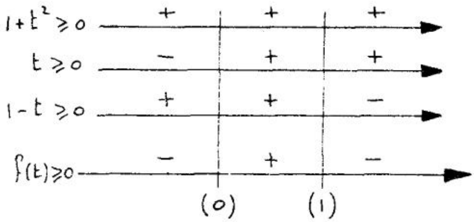
Studiamo l'andamento di questa funzione. Vi sono due asintoti verticali di equazione

$$t=0 \qquad t=1$$

Ed uno orizzontale di equazione

$$y=-h$$

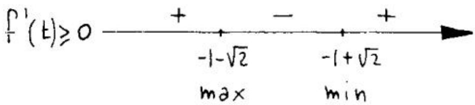
Non vi sono intersezioni con gli assi coordinati. Ricordiamo che per ragioni geometriche deve essere sempre $h > 0$.
Lo studio del segno della funzione fornisce



La derivata prima è

$$y' = h\frac{t^2 + 2t - 1}{\left(t - t^2\right)^2}$$

Osservando che il denominatore è sempre positivo per qualsiasi valore di t (si annulla solo per t = 0 e t = 1) e studiando il segno della derivata, si ha

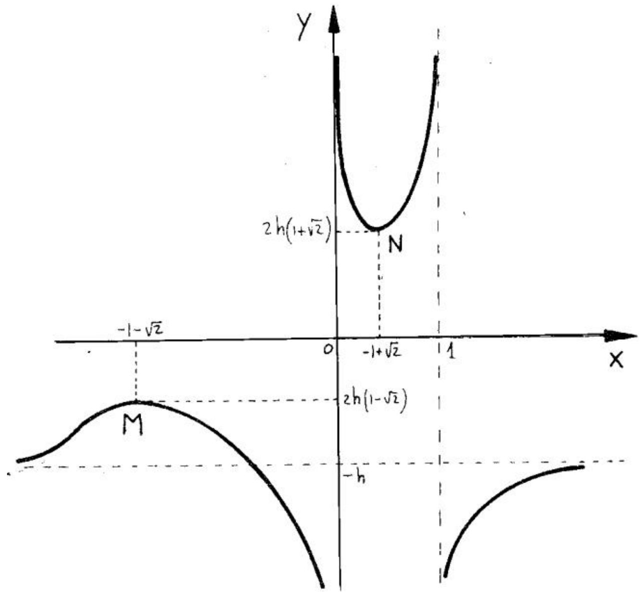


Da cui si può stabilire che si ha un massimo per $x = -1 - \sqrt{2}$ (scrivendo x al posto di t), ed un minimo per $x = -1 + \sqrt{2}$.
Le coordinate di questi due punti estremanti sono

$$M \equiv \left(-1 - \sqrt{2}; 2h\left(1 - \sqrt{2}\right)\right)$$

$$N \equiv \left(-1 + \sqrt{2}; 2h\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$$

Il grafico relativo è nella pagina seguente.
Si tenga presente che però ha significato geometrico solo quel tratto di curva per cui è contemporaneamente y > 0 e t >0 (o x >0).


y
2h(1+√2)
N
-1-√2
0
-1+√2
1
x
2h(1-√2)
M
-h