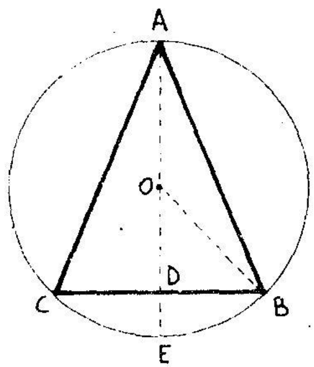
Luglio 1971 – Secondo problema

Fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio assegnato, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.



$$AO = r \qquad OD = x \ \ (-r \le x \le r)$$

Risulta

$$AD = r + x \qquad DB = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad BC = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$y = AD + 2 \cdot BC$$

$$y = r + x + 4\sqrt{r^2 - x^2}$$

Calcoliamo ora il massimo di questa funzione. Derivando

$$y' = 1 - \frac{4x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{r^2 - x^2} - 4x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

$$\sqrt{r^2 - x^2} = 4x \qquad \to \qquad r^2 - x^2 = 16x^2$$

$$x = \pm \frac{r\sqrt{17}}{17}$$

È accettabile solo la radice positiva perché quella negativa non soddisfa l'equazione irrazionale iniziale.

Quindi la funzione ammette un massimo per $x = \frac{r\sqrt{17}}{17}$ ed in tal caso essa assume il valore

$$y = r + \frac{r\sqrt{17}}{17} = r\left(1 + \frac{\sqrt{17}}{17}\right)$$