

Luglio 1971 – Terzo problema

Si studi il grafico della funzione

$$y = 2 \sin x + \sin 2x$$

Nell'intervallo

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

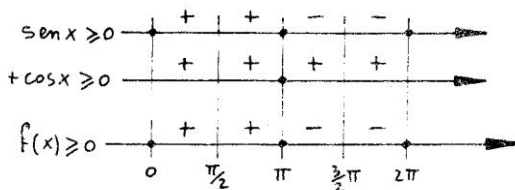
La funzione può anche essere scritta nel modo seguente

$$y = 2 \sin x + 2 \sin x \cos x$$

$$y = 2 \sin x (1 + \cos x)$$

Non vi sono asintoti. Le intersezioni con gli assi si hanno nei punti $(0;0)$, $(\pi;0)$, $(2\pi;0)$.

Studiando il segno della funzione si ottiene



Calcoliamo ora la derivata prima e troviamo i punti in cui essa si annulla

$$y' = 2(2 \cos^2 x + \cos x + 1) = 0$$

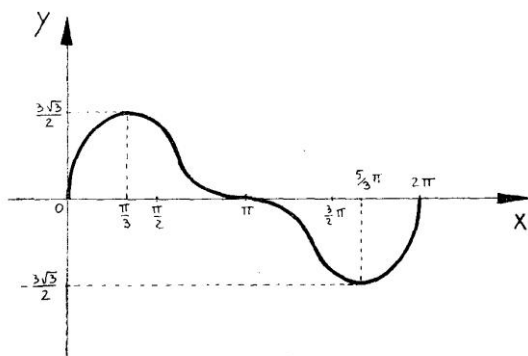
$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{5}{3}\pi \\ -1 & \Rightarrow x = \pi \end{cases}$$

Si ottengono così tre punti caratteristici con coordinate

$$A \equiv \left(\frac{\pi}{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \quad B \equiv (\pi; 0) \quad C \equiv \left(\frac{5}{3}\pi; -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

Che sono rispettivamente un massimo, un flesso orizzontale e un minimo. Infatti sostituendo le ascisse di tali punti nella derivata seconda si ottiene rispettivamente un risultato negativo, nullo e positivo.

Il grafico conclusivo è dunque



Lo stesso risultato qualitativo si sarebbe potuto ottenere senza alcun calcolo osservando che la funzione in esame può essere considerata come la somma algebrica delle due funzioni elementari $y = 2 \sin x$ e $y = \sin 2x$.

