Luglio 1971 – Quarto problema

Considerata la generica parabola di equazione

$$x = ay^2 + by + c\ \mathbf{x}$$

Si determinino i coefficienti a, b, c in modo che essa passi per i punti (– 6;0), (0;2), (0;6).
Quindi si calcoli l'area della regione piana limitata dalla curva e dalle tangenti ad essa nei punti di ascissa nulla.

Imponiamo il passaggio dell'equazione generica per i tre punti suddetti. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -6 = c \\ 0 = 4a + 2b + c \\ 0 = 36a + 6b + c \end{cases}$$

Cioè

$$\begin{cases} c = -6 \\ 2a + b = 3 \\ 6a + b = 1 \end{cases}$$

Che risolto fornisce i valori

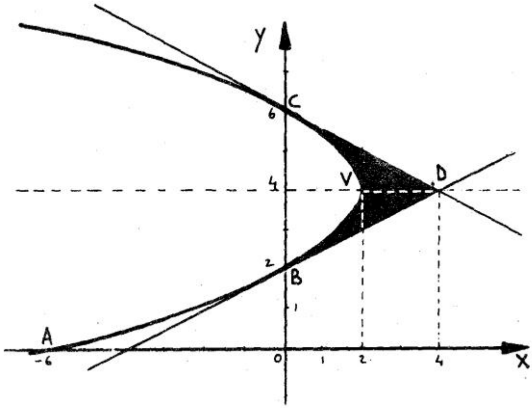
$$a = -\frac{1}{2} \qquad b = 4 \qquad c = -6$$

Quindi la parabola cercata ha equazione

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + 4y - 6$$

Il vertice ha coordinate

$$V \equiv \left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a} \right) \qquad \Rightarrow \qquad V \equiv (2;4)$$



Determiniamo le equazioni delle due rette tangenti alla parabola nei punti B e C.
Calcoliamo le tangenti senza far uso dell'analisi, e ricaviamo il coefficiente angolare delle rette applicando la condizione di tangenza fra i fasci di rette con centro in B e C, e la parabola.
Per la tangenza in B si ha

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y^2 + 4y - 6 \\ y - 2 = mx \end{cases} \quad \Rightarrow \quad mx^2 - 2x(2m-1) = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} == \quad \rightarrow \quad (2m-1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \frac{1}{2}$$

E, per simmetria, il coefficiente angolare della retta tangente passante per C è $m = -\frac{1}{2}$.

Le equazioni delle due rette sono quindi

$$y = \frac{x}{2} + 2 \qquad \text{quella passante per B}$$

$$y = -\frac{x}{2} + 6 \qquad \text{quella passante per C}$$

Risolvendo il sistema formato da queste due rette si trovano le coordinate di D

$$D \equiv (4;4)$$

Passiamo al calcolo della superficie ombreggiata. L'area del triangolo BCD è

$$S_{BCD} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

La superficie del triangoloide CVB è invece

$$S_{CVB} = \int_2^6 \left(-\frac{1}{2} y^2 + 4y - 6 \right) dy = \left[-\frac{y^3}{6} + 2y^2 - 6y \right]_2^6 = \frac{16}{3}$$

La regione che ci interessa ha quindi un'area di

$$S = S_{BCD} - S_{CVB} = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$