Luglio 1972 – Primo problema

Si scriva l'equazione della circonferenza passante per i punti $A \equiv (-2;0)$ e $B \equiv (4;0)$ **ed avente il centro sulla retta y = 4 e si calcolino le coordinate degli estremi del diametro parallelo all'asse delle x.**
Si determinino poi i coefficienti dell'equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

In modo che le parabole da essa rappresentate abbiano in comune il punto $C \equiv (0;4)$ **e siano tangenti all'asse delle ascisse. Tra queste parabole si trovino quelle che passano per l'uno o per l'altro degli estremi del diametro suddetto.**
Si calcoli infine l'area della regione limitata dalle predette parabole e dall'asse delle x.

Poiché il centro della circonferenza si trova sulla retta di equazione y = 4, l'ordinata del centro è $\beta = 4$.
E quindi l'equazione generica diviene

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 8y + \alpha^2 + 16 - r^2 = 0$$

Imponiamo il passaggio per i punti A e B. Si ottiene il sistema

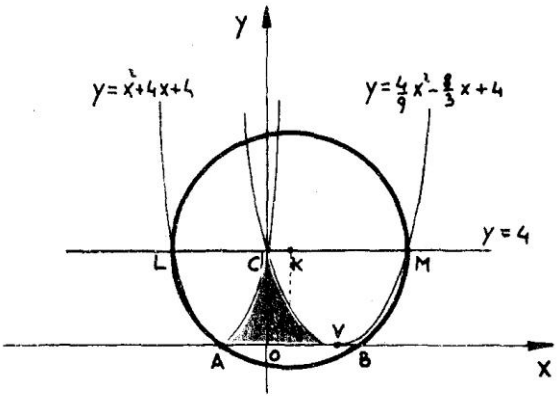
$$\begin{cases} 4 + 4\alpha + \alpha^2 + 16 - r^2 = 0 \\ 16 - 8\alpha + \alpha^2 + 16 - r^2 = 0 \end{cases}$$

Da cui risolvendo si ricava $\begin{cases} \alpha = 1 \\ r = 5 \end{cases}$

Quindi l'equazione della circonferenza è

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0}$$

Con centro in $K \equiv (1;4)$ e raggio r = 5.



Gli estremi del diametro parallelo all'asse x hanno coordinate

$$L \equiv (-4;4) \text{ e } M \equiv (6;4)$$

Passiamo ora all'equazione generica di una parabola con asse verticale

$$y = ax^2 + bx + c$$

Ed imponiamole il passaggio per il punto C. Si ottiene c = 4 e l'equazione diviene

$$y = ax^2 + bx + 4$$

Imponiamo ancora la tangenza all'asse x (la cui equazione è y = 0)

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Imponiamo al discriminante di annullarsi

$$ax^2 + bx + 4 = 0$$

$$\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad b^2 - 16a = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{b^2}{16}$$

Si ottiene la famiglia di parabole

$$y = \frac{b^2}{16}x^2 + bx + 4$$

Le due parabole richieste dal testo si ottengono imponendo ulteriormente il passaggio rispettivamente per i punti L ed M

$$4 = b^2 - 4b + 4 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b = 0 & \text{da scartare} \\ b = 4 \end{cases}$$

$$4 = \frac{9}{4}b^2 + 6b + 4 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b = 0 & \text{da scartare} \\ b = -\frac{24}{9} \end{cases}$$

Le due parabole sono allora

$y = x^2 + 4x + 4$ quella passante per L

$y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$ quella passante per M

Mettendole a sistema determiniamo le coordinate dei loro punti di intersezione

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -12 \\ y = 100 \end{cases}$$

Il primo punto coincide con C, mentre il secondo cade fuori grafico. I vertici delle due parabole sono

$$A \equiv (-2;0) \qquad V \equiv (3;0)$$

L'area della zona ombreggiata del grafico è

$$S = \int_{-2}^{0} \left(x^2 + 4x + 4\right) dx + \int_{0}^{3} \left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{4}{9}\frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{0}^{3} = \frac{20}{3}$$