Luglio 1972 – Secondo problema

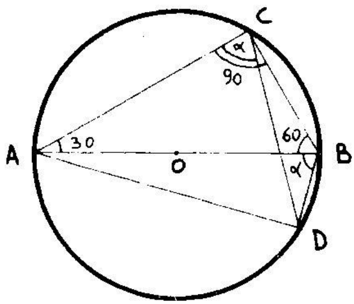
Data una circonferenza di diametro AB = 2r, si prendano su di essa da parte opposta di AB, due punti C e D tali che

$$\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3} \qquad \widehat{ABD} = \alpha$$

Si consideri la funzione

$$y = \frac{AD^2 - CD^2}{BC^2}$$

Espressa per mezzo di $x = \tan\alpha$ **e se ne studi il grafico.**



Essendo ABC mezzo triangolo equilatero, è

$$BC = \frac{AB}{2} = r$$

Applicando il teorema della corda al triangolo CBD, si ottiene

$$AD = 2r\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$CD = 2r\,\mathrm{sen}(60 + \alpha)$$

Sostituiamo tali espressioni nella relazione proposta dal problema

$$y = \frac{4r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 4r^2 \operatorname{sen}^2 (60 + \alpha)}{r^2}$$

Semplifichiamo r^2 e sviluppiamo

$$y = 4 \operatorname{sen}^2 \alpha - 4 (\operatorname{sen} 60 \cos \alpha + \cos 60 \operatorname{sen} \alpha)^2$$

$$y = 4 \operatorname{sen}^2 \alpha - 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha \right)^2$$

$$y = 3 \operatorname{sen}^2 \alpha - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha$$

$$y = \frac{3 \operatorname{sen}^2 \alpha - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per $\cos^2 \alpha$

$$y = \frac{3 \tan^2 \alpha - 2\sqrt{3} \tan \alpha - 3}{\tan^2 \alpha + 1}$$

Ed applicando infine la sostituzione $x = \tan \alpha$, si ha

$$\boxed{y = \frac{3x^2 - 2x\sqrt{3} - 3}{x^2 + 1} \qquad \text{con} \quad -\infty \le x \le \infty}$$

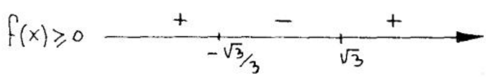
Non vi sono asintoti verticali perché non ci sono valori reali di x che annullino il denominatore. Non vi sono asintoti obliqui, ma c'è un asintoto orizzontale di equazione y = 3 perché

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$$

Le intersezioni con gli assi sono

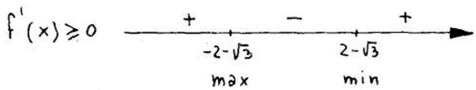
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

Studiando il segno della f(x) si ha



Calcoliamo ora la derivata e studiamone il segno

$$y' = \frac{2\left(x^2\sqrt{3} + 6x - \sqrt{3}\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$



Le coordinate dei punti estremanti sono

$$A \equiv \left(-2-\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right) \qquad \text{massimo}$$

$$B \equiv \left(2-\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\right) \qquad \text{minimo}$$

Ed il grafico è