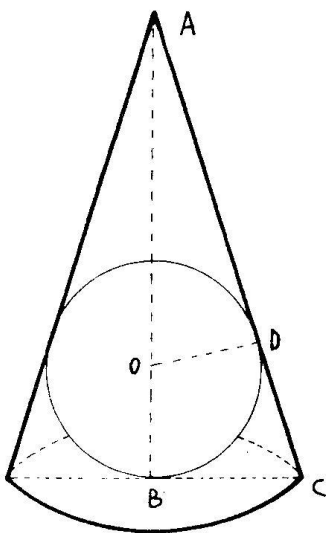


Luglio 1972 – Quarto problema

Si determinino l'altezza e il raggio di base del cono di volume minimo circoscritto ad una sfera di raggio r .

Si dimostri poi che il suddetto cono è anche quello di minima superficie totale.



$OB = OD = r$ Poniamo $AO = x$ (con $x > 0$)

Risulta

$$AB = r + x$$

$$AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{x^2 - r^2}$$

I due triangoli ADO e ABC sono simili e quindi vale la proporzione

$$AD : OD = AB : BC$$

Da cui si ricava

$$BC = \frac{OD \cdot AB}{AD} = \frac{r(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

Indicando con y il volume (variabile) del cono, si ottiene

$$y = \frac{\pi \cdot BC^2 \cdot AB}{3} = \frac{\pi r^2 (r+x)^2 (r+x)}{3(x-r)(r+x)}$$

$$(1) \quad y = \frac{\pi r^2 (r+x)^2}{3(x-r)}$$

Deriviamo per cercare il minimo di questa funzione

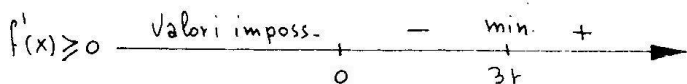
$$y' = \frac{6\pi r^2 (r+x)(x-r) - 3\pi r^2 (r+x)^2}{9(x-r)^2}$$

$$y' = \frac{\pi r^2 (x^2 + 2rx - 3r^2)}{3(x-r)^2}$$

$$x^2 + 2rx - 3r^2 = 0$$

$$x = r \pm \sqrt{r^2 + 3r^2} = r \pm 2r = \begin{cases} 3r \\ -r \end{cases} \quad \text{da scartare}$$

Studiando il segno di y' si ha



Quindi la funzione ha un minimo per $x = 3r$. Per tale valore dell'incognita risulta

$$AB = r + 3r = 4r \quad BC = \frac{r \cdot 4r}{\sqrt{9r^2 - r^2}} = r\sqrt{2}$$

Il grafico della funzione non è richiesto.

Passiamo ora a calcolare la superficie del cono

$$S_t = \pi \cdot BC(AC + BC)$$

$$\begin{cases} AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(r+x)^2 + \frac{r^2(r+x)^2}{x^2 - r^2}} = \frac{x(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \\ BC = \frac{r(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \end{cases}$$

Sostituendo ed indicando con y la superficie (variabile), si ottiene

$$y = \pi \frac{r(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \left(\frac{x(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} + \frac{r(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \right)$$

E, semplificando,

$$(2) \quad y = \frac{\pi r(r+x)^2}{x-r}$$

Questa funzione è uguale alla (1) a meno di una costante e dunque ammetterà un minimo per lo stesso valore precedente $x = 3r$.