Luglio 1972 – Sessione suppletiva (primo problema)

Date le due parabole rappresentate dalle equazioni

$$y = x^2 - 7x + 12$$

$$y = 4x^2 - 25x + 36$$

Si determinino le coordinate dei punti ad esse comuni, le equazioni delle tangenti comuni, e le coordinate dei punti di contatto.
Si calcoli poi l'area di una delle due regioni piane limitate dalle parabole e da una delle suddette tangenti.

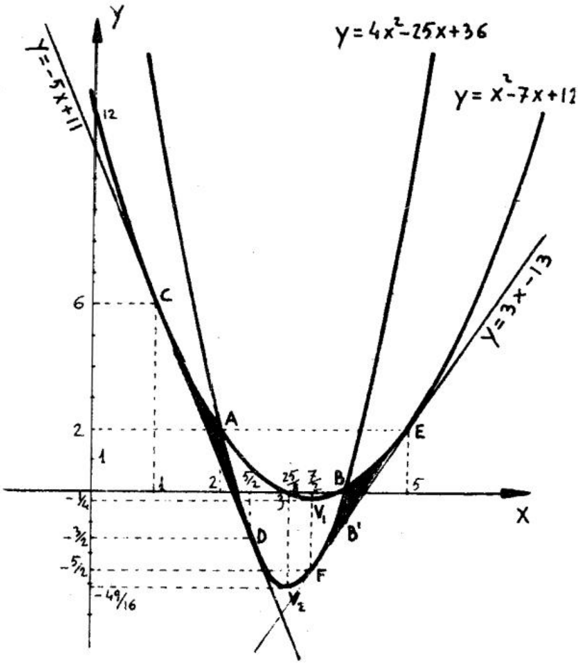
Utilizzando la relazione $V \equiv \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ calcoliamo le coordinate dei vertici delle due parabole, e le intersezioni con gli assi. Si ottiene

$$V_1 \equiv \left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{4}\right) \qquad V_2 \equiv \left(\frac{25}{8}; -\frac{49}{16}\right)$$

Le intersezioni fra le parabole sono

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = 4x^2 - 25x + 36 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A \equiv (2; 2) \quad B \equiv (4; 0)$$

Nel grafico seguente, per una migliore visibilità, il segmento unitario sulle ascisse ha lunghezza doppia rispetto a quello sulle ordinate.



Le equazioni delle rette tangenti ad entrambe le parabole si ricavano mettendo a sistema ciascuna parabola con la retta generica, ed imponendo ad entrambi i sistemi la condizione di tangenza.

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = mx + q \end{cases} \rightarrow \ \Delta_1 = 0 \ \rightarrow \ (7+m)^2 - 4(12-q) = 0$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 25x + 36 \\ y = mx + q \end{cases} \rightarrow \ \Delta_2 = 0 \ \rightarrow \ (m+25)^2 - 16(36-q) = 0$$

Risolvendo il sistema formato dalle due relazioni così ottenute, si trovano i valori di m e q che soddisfano le condizioni richieste

$$\begin{cases} (7+m)^2 - 4(12-q) = 0 \\ (m+25)^2 - 16(36-q) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ q = -13 \end{cases} \quad \begin{cases} m = -5 \\ q = 11 \end{cases}$$

Le due rette tangenti hanno quindi equazione

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 3x - 13 \\ y = -5x + 11 \end{array}}$$

Calcoliamo ora le coordinate dei punti di contatto fra le due rette tangenti e le due parabole. Risolvendo i sistemi si ottiene

$$\boxed{\begin{array}{lll} \begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = 3x - 13 \end{cases} & \rightarrow & E \equiv (5;2) \\ \begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = -5x + 11 \end{cases} & \rightarrow & C \equiv (1;6) \\ \begin{cases} y = 4x^2 - 25x + 36 \\ y = 3x - 13 \end{cases} & \rightarrow & F \equiv \left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right) \\ \begin{cases} y = 4x^2 - 25x + 36 \\ y = -5x + 11 \end{cases} & \rightarrow & D \equiv \left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right) \end{array}}$$

Occupiamoci infine delle due regioni piane limitate dalle parabole e dalle rette tangenti, ombreggiate nella figura.
Dobbiamo calcolarne una sola, e scegliamo quella di destra perché l’intersezione B fra le due parabole si trova esattamente sull’asse x, e ciò rende più facile il calcolo.
La superficie può essere scomposta in due triangoloidi B’BE e FBB’, le cui rispettive aree sono

$$S_{B'BE} = \int_4^5 \left(x^2 - 7x + 12\right)dx - \int_4^5 (3x - 13)\,dx = \frac{6}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$S_{FBB'} = \left| \int_{\frac{7}{2}}^{4} (3x - 13)\,dx - \int_{\frac{7}{2}}^{4} (4x^2 - 25x + 36)\,dx \right| =$$

$$= \left| -\frac{7}{8} + \frac{17}{24} \right| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6}$$

E quindi

$$S_{FBE} = S_{B'BE} + S_{FBB'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$