Luglio 1972 – Sessione suppletiva (secondo problema)

Si disegni la curva di equazione

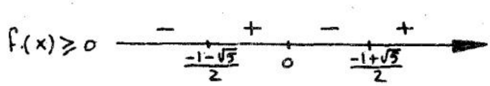
$$y = \frac{2x}{x^2 + x - 1}$$

Si determinino le coordinate dei punti comuni ad essa e alla sua simmetrica rispetto all'asse y e si calcoli l'area del quadrilatero convesso formato dalle tangenti alle due curve bei punti comuni di ascissa non nulla.

La curva ha due asintoti verticali di equazione

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

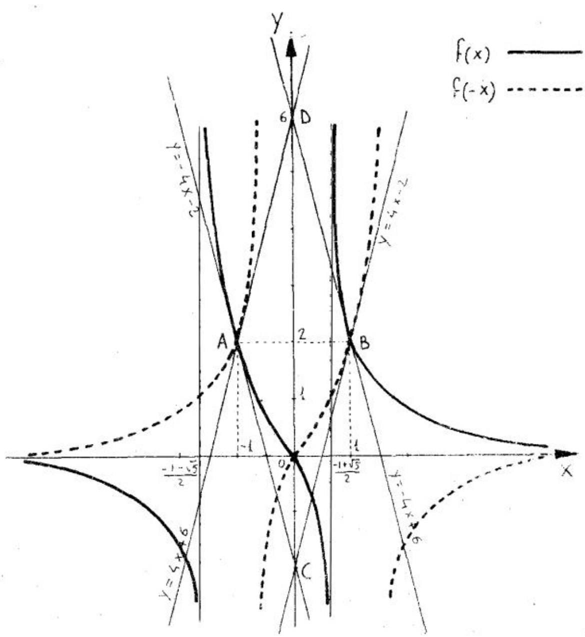
E un asintoto orizzontale di equazione y = 0. L'unica intersezione con gli assi cartesiani è nell'origine.
Studiando il segno della funzione si ottiene



La derivata prima è

$$y' = -2\frac{x^2 + 1}{\left(x^2 + x - 1\right)^2}$$

Non esistono valori di x che annullino la derivata prima, e quindi non ci sono né massimi né minimi. Inoltre il segno della derivata è sempre negativo e quindi la funzione è sempre decrescente.



Con il tratto pieno è indicato il grafico della f(x).
La curva simmetrica rispetto all'asse y è invece indicata tratteggiata.
Data una funzione f(x), la sua simmetrica rispetto all'asse y ha equazione f(–x), e cioè, nel nostro caso,

$$f(-x) \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{-2x}{x^2 - x - 1}$$

La sua derivata è

$$y' = \frac{2\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - x - 1\right)^2}$$

Calcoliamo le coordinate dei punti di intersezione

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{x^2 + x - 1} \\ y = \dfrac{-2x}{x^2 - x - 1} \end{cases}$$

$$\frac{2x}{x^2 + x - 1} = \frac{-2x}{x^2 - x - 1}$$

$$2x\left(x^2 - x - 1\right) = -2x\left(x^2 + x - 1\right)$$

Poiché non ci interessa la soluzione x = 0, possiamo dividere i due membri per 2x

$$x^2 - x - 1 = -x^2 - x + 1 \qquad \rightarrow \qquad x = \pm 1$$

Quindi le intersezioni hanno coordinate

$$A \equiv \left(-1; 2\right) \qquad B \equiv \left(1; 2\right)$$

La derivata della f(x) calcolata nei punti di ascissa ±1 fornisce i coefficienti angolari delle rette tangenti

$$m = \pm 4$$

e gli stessi valori si ottengono dalla derivata della f(–x) calcolata nei punti di ascissa ±1.

Quindi le due rette tangenti passanti per A hanno equazione

$$y = 4x + 6 \qquad \text{e} \qquad y = -4x - 2$$

Mentre le due rette tangenti passanti per B hanno equazione

$$y = 4x - 2 \qquad \text{e} \qquad y = -4x + 6$$

Calcoliamo ora (vedi grafico) le coordinate dei punti C e D.

$$\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -4x - 2 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad C \equiv \left(0; -2\right)$$

$$\begin{cases} y = 4x + 6 \\ y = -4x + 6 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad D \equiv \left(0; 6\right)$$

Il quadrilatero convesso cui si fa cenno nel testo, come risulta evidente dal grafico, è un rombo con diagonali

$$AB = 2 \qquad \text{e} \qquad CD = 8$$

E quindi la sua superficie è

$$S = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8$$