Luglio 1972 – Sessione suppletiva (quarto problema)

Si discuta la seguente equazione

$$2kx^2+2(k+1)x+k^2+1=0$$

Per x compreso fra $-\frac{1}{2}$ **e 1.**

Nei problemi finora svolti abbiamo utilizzato sempre la discussione grafica o geometrica anche se era indicata solo come opzionale.

Infatti era consuetudine in quegli anni svolgere le discussioni ricorrendo principalmente ad un altro metodo, algebrico, detto di Tartinville che aveva il difetto di essere completamente automatico e che gli insegnanti più giovani sicuramente neanche ricordano perché si è man mano preferito ricorrere alla geometria analitica, abbandonando la via algebrica molto meno utile didatticamente.

In questo problema però, poiché il parametro k compare in tutti e tre i termini, la discussione geometrica risulta abbastanza complessa ed allora, anche per mostrare come funzionava il metodo di Tartinville, preferiamo seguire il metodo algebrico.

Determiniamo allora preventivamente per quali intervalli dei valori di k risultano positive, nulle o negative le relazioni esprimenti

A	coefficiente del termine di secondo grado
Δ o $\frac{\Delta}{4}$	discriminante (intero o ridotto)
$f(\alpha)$ $f(\beta)$	valori che l'equazione assume per $x=\alpha$ e $x=\beta$ (nel nostro caso è $\alpha=-\frac{1}{2}$ e $\beta=1$)
$\Sigma-\alpha$ $\Sigma-\beta$	dove $\Sigma=-\frac{b}{2a}$ è il punto medio fra le due radici dell'equazione.

Si ha

$$A \geq 0 \quad \text{quando} \quad k \geq 0$$

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \quad \text{quando} \quad (k+1)^2 - 2k\left(k^2+1\right) \geq 0 \quad \rightarrow \quad k \leq 1$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad \text{quando} \quad k\left(k-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad \rightarrow \quad k \leq 0 \ \text{ e } \ k \geq \frac{1}{2}$$

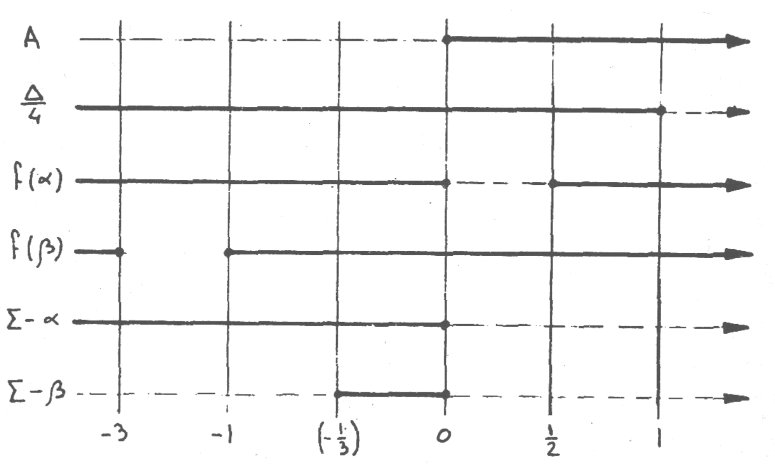
$$f(1) \geq 0 \quad \text{quando} \quad k^2+4k+3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad k \leq -3 \ \text{ e } \ k \geq -1$$

$$\Sigma + \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{quando} \quad \frac{-k-1}{2k} + \frac{1}{2} \geq 0 \quad \rightarrow \quad k \leq 0$$

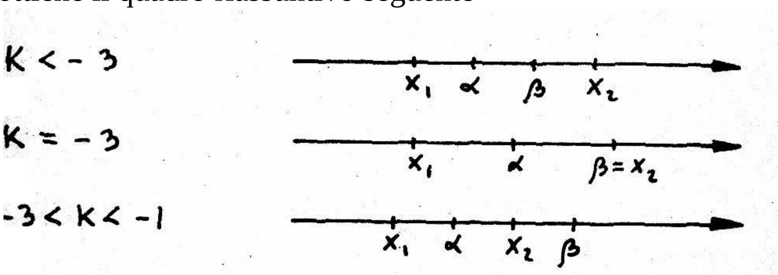
$$\Sigma - 1 \geq 0 \quad \text{quando} \quad \frac{-k-1}{2k} - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{3} \leq k \leq 0$$

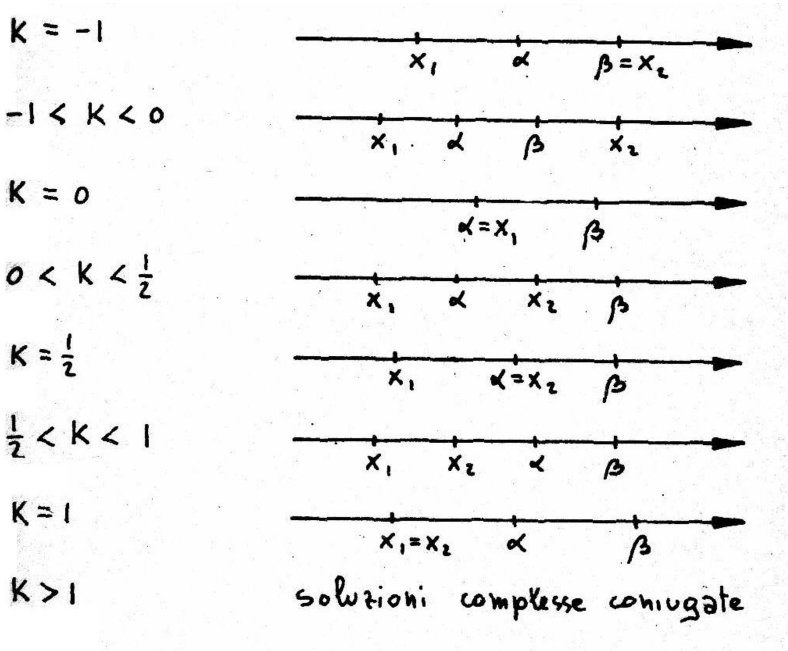
Ora riuniamo in un unico quadro riassuntivo i risultati ottenuti.

Il valore $k=-\frac{1}{3}$ viene messo fra parentesi perché non rappresenta un “caposaldo di discussione”, infatti per tale valore si annulla solo $\Sigma-\beta$.



A questo punto occorre sapere che quando A e f(α) hanno segno concorde, allora α è esterno all'intervallo delle radici. E' invece interno a tale intervallo quando i segni sono discordi.
Altrettanto si può dire per A e f(β).
Ora andiamo ad esaminare quali sono le posizioni reciproche delle due radici x_1 e x_2, e dei limiti α e β, sia nei capisaldi di discussione, sia negli intervalli fra due capisaldi consecutivi.
Ci saranno soluzioni accettabili in quei casi in cui le radici risulteranno interne ai due valori α e β.
Si ottiene il quadro riassuntivo seguente





Dal quale risulta che l’equazione ammette una sola soluzione accettabile per

$$\boxed{-3 \le k \le -1 \qquad \text{e per} \qquad 0 \le k \le \frac{1}{2}}$$

Si può capire come tale metodo sia caduto in disuso per la sua assoluta meccanicità e scarsa utilità didattica.
Il matematico De Finetti combattè negli anni 70 la frequenza con cui si ricorreva a tale metodo chiamandola moda della “trinomite acuta”.