Luglio 1973 – Primo problema

Si scrivano le equazioni delle due circonferenze C' e C" tangenti alla parabola di equazione

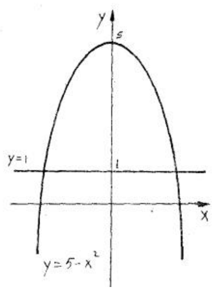
$$y = 5 - x^2$$

Ed alla retta di equazione

$$y = 1$$

si indichino con r' e r" (r' > r") i rispettivi raggi.
Dopo aver determinato r' e r" si scriva l'equazione di un'altra circonferenza C''' tangente alla C", avente il centro sulla retta degli altri due centri e raggio uguale ad r'.
Inoltre si trovi l'equazione della parabola tangente a C" e a C''' e si calcoli l'area della regione di piano limitata dalle due parabole.

Dopo aver disegnato la parabola e la retta si può osservare che le due circonferenze C' e C" non possono che essere tangenti internamente alla parabola perché in caso contrario le condizioni fornite dal testo non sarebbero sufficienti alla loro determinazione.



Ne risulta come conseguenza che l'ascissa dei centri di C' e C" devono essere nulle. Entrambe allora hanno equazione generica del tipo

$$x^2+y^2+by+c=0$$

I valori dei parametri b e c si determinano imponendo che si annullino i discriminanti dei sistemi formati dall'equazione generica e dalle equazioni della parabola e della retta.

$$\begin{cases} x^2+y^2+by+c=0 \\ y=5-x^2 \end{cases} \qquad \Delta=0 \quad \rightarrow \quad b^2-2b-19-4c=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+by+c=0 \\ y=1 \end{cases} \qquad \Delta=0 \quad \rightarrow \quad c=-1-b$$

Da cui, ponendo ulteriormente a sistema i due discriminanti, si ottiene

$$\begin{cases} b^2-2b-19-4c=0 \\ c=-1-b \end{cases}$$

Si ricavano le due soluzioni

$$\begin{cases} b=3 \\ c=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-5 \\ c=4 \end{cases}$$

Le equazioni delle due circonferenze sono allora

$$\boxed{\begin{array}{lll} C' & \Rightarrow & x^2+y^2+3y-4=0 \\ C'' & \Rightarrow & x^2+y^2-5y+4=0 \end{array}}$$

Le coordinate del centro e il raggio sono rispettivamente

$$C' \quad \rightarrow \quad K\equiv\left(0;-\frac{3}{2}\right) \quad \rightarrow \quad r'=\frac{5}{2}$$

$$C'' \quad \rightarrow \quad L\equiv\left(0;\frac{5}{2}\right) \quad \rightarrow \quad r''=\frac{3}{2}$$

Passiamo ora alla determinazione della circonferenza C'''. Il suo centro si trova sull'asse y. Poiché l'ordinata massima di C" è y = 4 e il raggio di C''' deve essere $\frac{5}{2}$, l'ordinata del centro è

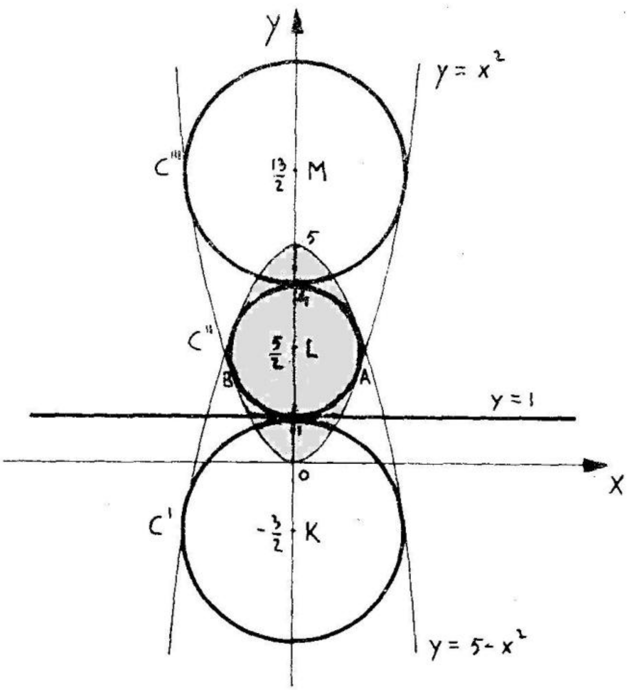
$$4+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}$$

Le coordinate del centro di C''' sono

$$M \equiv \left(0;\frac{13}{2}\right)$$

E la sua equazione è

$$\boxed{C''' \quad \rightarrow \quad x^2+y^2-13y+36=0}$$



Dalla figura si nota che per simmetria la parabola tangente a C” e C''' deve avere il vertice nell’origine degli assi. La sua equazione è

$$y = x^2$$

le intersezioni fra le due parabole si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 5 - x^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

E si trova

$$A \equiv \left(\frac{\sqrt{10}}{2} ; \frac{5}{2} \right) \qquad B \equiv \left(-\frac{\sqrt{10}}{2} ; \frac{5}{2} \right)$$

Infine, l’area della regione ombreggiata è

$$S = \int_{-\frac{\sqrt{10}}{2}}^{\frac{\sqrt{10}}{2}} \left(5 - x^2\right) dx - 2 \int_{0}^{\frac{\sqrt{10}}{2}} x^2 \, dx = 5\sqrt{10} - \frac{5\sqrt{10}}{3} = \frac{10\sqrt{10}}{3}$$