Luglio 1973 – Secondo problema

Si disegni il grafico della funzione

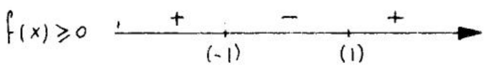
$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

E se ne determinino i punti per i quali la distanza dal punto $A \equiv (0;1)$ **assume valore minimo.**

La funzione è definita per $-\infty < x < \infty$ ad eccezione dei punti $x = \pm 1$ in cui essa ha due asintoti verticali perché per tali valori si annulla il denominatore.
Vi è anche un asintoto orizzontale di equazione y = 1 perché

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

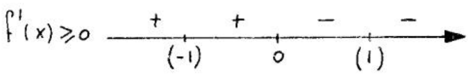
Esiste una sola intersezione con gli assi cartesiani in $B \equiv (0;-1)$.
Dallo studio del segno della funzione si ha



La derivata è

$$y' = -\frac{4x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

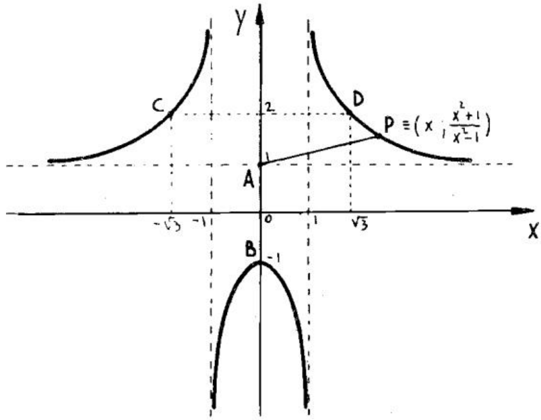
E lo studio del segno dà



Esiste quindi un solo punto di massimo con coordinate

$$B \equiv (0; -1)$$

Il grafico della funzione è il seguente



Ora prendiamo in considerazione un generico punto P che scorre lungo la funzione. Le sue coordinate sono

$$P \equiv \left(x; \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)$$

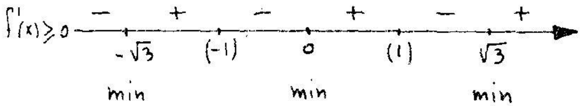
La lunghezza del segmento AP è

$$AP = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^2} = \sqrt{x^2 + 4\left(x^2-1\right)^{-2}}$$

Per ottenere i minimi cercati deriviamo e studiamo il segno della derivata

$$\frac{x\left[1 - \frac{8}{\left(x^2-1\right)^3}\right]}{\sqrt{x^2 + \frac{4}{\left(x^2-1\right)^2}}} \geq 0$$

Si ottiene



Esistono quindi tre punti di minimo le cui coordinate sono

$$B \equiv (0;-1) \qquad C \equiv \left(-\sqrt{3};2\right) \qquad D \equiv \left(\sqrt{3};2\right)$$