Luglio 1973 – Quarto problema

Si studi la funzione

$$y = \frac{1+x^3}{x^2}$$

E se ne disegni il grafico.
Si scriva poi l'equazione della tangente nel suo punto A di ordinata nulla e quella della retta passante per lo stesso punto e tangente alla curva in un ulteriore punto B.
Detta C l'intersezione della prima tangente con il grafico, si calcoli l'area della regione piana limitata al segmento BC e dal grafico stesso.

L'insieme di definizione è $-\infty < x < \infty$ con eccezione del punto x = 0 in cui vi è un asintoto verticale.
Non esistono asintoti orizzontali perché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x^3}{x^2} = \pm\infty$$

Vi è però un asintoto obliquo perché

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x^3}{x^3} = 1 & \Rightarrow \qquad m = 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1+x^3}{x^2} - x \right) = 0 & \Rightarrow \quad q = 0 \end{cases}$$

$$y = mx + q \qquad \Rightarrow \qquad y = x$$

Le intersezioni con gli assi sono

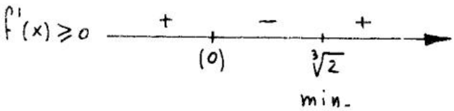
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Studiando il segno della funzione si ha

Calcoliamo la derivata

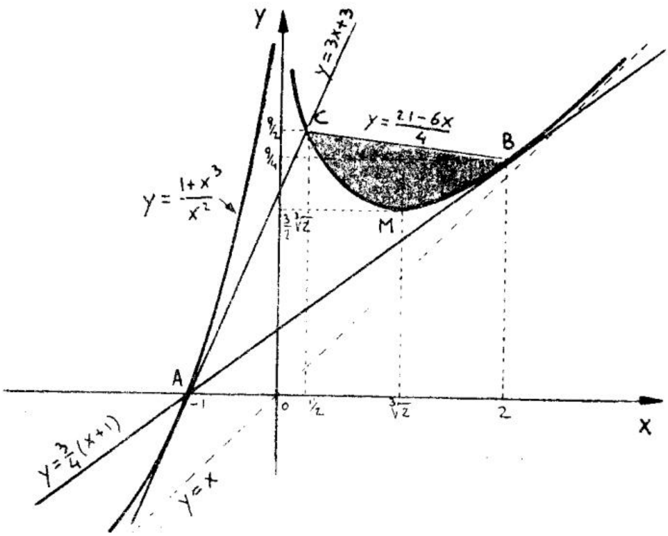
$$y' = \frac{x^4 - 2x}{x^4} = \frac{x^3 - 2}{x^3} \geq 0$$

E studiamone il segno



Esiste allora un solo punto di minimo con coordinate

$$M \equiv \left(\sqrt[3]{2}; \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \right)$$



Il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto $A \equiv (-1; 0)$ è

$$f'(-1)=\frac{1+2}{1}=3$$

e perciò l'equazione della retta è

$$y=3x+3$$

Per calcolare l'equazione dell'altra retta tangente, occorre mettere a sistema il fascio di rette con centro A, e l'equazione della curva

$$\begin{cases} y=m(x+1) \\ y=\dfrac{1+x^3}{x^2} \end{cases}$$

E applicare la condizione di tangenza ($\Delta=0$). Eliminiamo la x per confronto. Eliminando la y si ottiene un'equazione di terzo grado

$$(m-1)x^3-mx^2-1=0$$

Ma questa equazione ammette la soluzione $x=-1$ perché la curva passa per il punto A. Possiamo allora dividere per x + 1 e scriverla nella forma fattorizzata

$$(x+1)\left[(m-1)x^2+x-1\right]=0$$

Per la tangenza è sufficiente che si annulli il discriminante dell'equazione dentro parentesi quadra

$$1+4(m-1)=0 \qquad \rightarrow \qquad m=\frac{3}{4}$$

L'equazione della retta tangente è allora

$$y=\frac{3}{4}(x+1)$$

Risolvendo ora i sistemi formati dall'equazione della curva e dalle equazioni delle due rette tangenti, si ricavano le coordinate dei punti B e C.

$$B\equiv\left(2;\frac{9}{4}\right) \qquad\qquad C\equiv\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$$

L'equazione della retta passante per B e C è

$$y = \frac{21 - 6x}{4}$$

Calcoliamo infine l'area della regione ombreggiata nella figura

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{21 - 6x}{4} dx - \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1 + x^3}{x^2} dx = \frac{27}{16}$$