

1.

LUGLIO 1974
PRIMO PROBLEMA

ASSEGNATA LA FUNZIONE

$$y = \operatorname{sen} x + a \cos x + b \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

SI DETERMININO I VALORI DI a E DI b IN MODO CHE AMMETTA UN MASSIMO RELATIVO $y=0$ NEL PUNTO $x=\frac{\pi}{6}$ E SI DISEGNI LA CURVA RAPPRESENTATIVA DELLA FUNZIONE OTTENUTA.

CONDOTTA LA RETTA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO A DI ASCISSA $x=0$, E TRACCIATA LA RETTA $x=\frac{\pi}{2}$, SI CALCOLI L'AREA DELLA REGIONE PIANA LIMITATA DA TALE RETTA, DALLA TANGENTE IN A E DALLA CURVA.

La funzione deve passare per il punto di coordinate $(\frac{\pi}{6}; 0)$. Imponiamo perciò il passaggio della funzione generica

$$y = \operatorname{sen} x + a \cos x + b$$

per tale punto. Si ottiene

$$0 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + a \cos \frac{\pi}{6} + b$$

$$0 = \frac{1}{2} + a \frac{\sqrt{3}}{2} + b$$

da cui si può ricavare uno dei due parametri in funzione dell'altro

$$b = \frac{-1 - a\sqrt{3}}{2}$$

Sostituendo nella funzione generica si elimina così il parametro b

$$y = \sin x + a \cos x - \frac{1 + a\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

Per eliminare anche il parametro a imponiamo la condizione che nel punto suddetto $(\frac{\pi}{6}; 0)$ si sia un massimo: la derivata prima della funzione deve annullarsi per $x = \frac{\pi}{6}$.

Si ha

$$y' = \cos x - a \sin x$$

$$f'(\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} - a \sin \frac{\pi}{6} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - a \frac{1}{2} = 0$$

$$a = \sqrt{3}$$

Sostituendo nella (1) si ha perciò

$$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x - 2 \quad (2)$$

che è la funzione cercata.

Studiamo il suo andamento grafico nell'intervallo

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

come richiesto dal testo.

Non vi sono asintoti di alcun tipo. Annulliamo la derivata prima e risolviamo

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$1 - \sqrt{3} \tan x = 0$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Nell'intervallo che ci interessa le uniche soluzioni sono

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = -\frac{5}{6}\pi \end{cases}$$

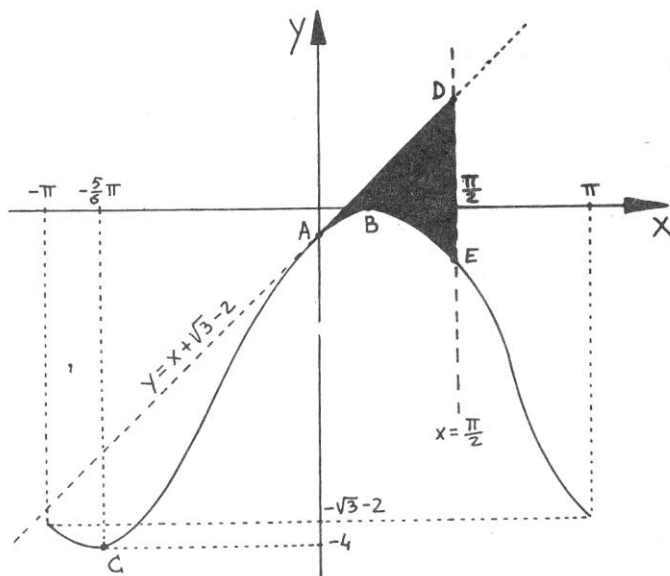
Sostituendo tali valori nella derivata seconda della (2), si individuano un massimo relativo

$$B \equiv \left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$$

e un minimo relativo

$$C \equiv \left(-\frac{5}{6}\pi; -4\right)$$

Il grafico è allora il seguente



Il punto A ha coordinate

$$A \equiv (0; \sqrt{3}-2)$$

La derivata prima della funzione calcolata nel punto A è

$$f'(0) = \cos 0 - \sqrt{3} \sin 0 = 1$$

la retta tangente alla curva nel punto A è quindi

$$y = mx + q$$

$$\boxed{y = x + \sqrt{3} - 2} \quad (3)$$

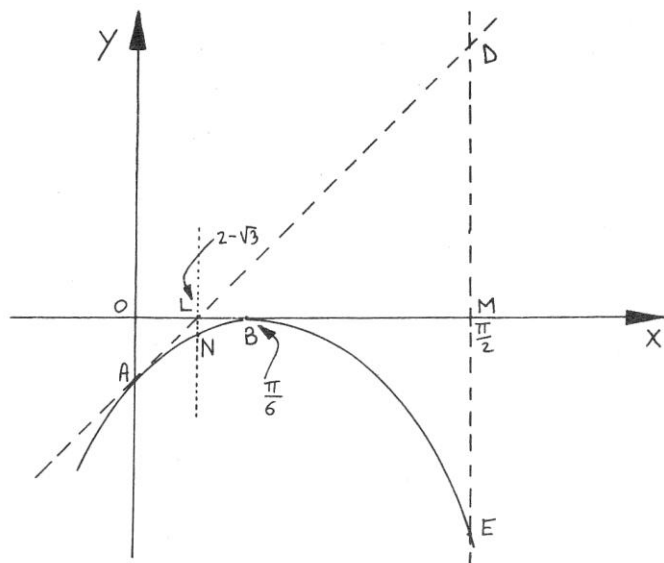
Tracciata anche la retta di equazione $x = \frac{\pi}{2}$ si individuano facilmente i punti

$$D \equiv \left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$E \equiv \left(\frac{\pi}{2}; -1\right)$$

Occorre infine calcolare l'area del "triangoloide" colorato ADE.

Per una migliore comprensione del procedimento tracciamo un particolare ingrandito del grafico precedente.



Essendo LN la verticale passante per il punto in cui la retta $y = x + \sqrt{3} - 2$ taglia l'asse x ($OL = 2 - \sqrt{3}$), scomponiamo la superficie del triangoloide ADE nel modo seguente:

$$S_{ADE} = S_{LMD} + S_{BME} + S_{OBA} - S_{OLA}$$

Facendo i calcoli si ha

$$\begin{aligned} S_{LMD} &= \frac{LM^2}{2} = \frac{\left[\frac{\pi}{2} - (2 - \sqrt{3})\right]^2}{2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} + 7 - 2\pi + \pi\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{7}{2} - \pi + \pi\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$S_{OLA} = \frac{OL^2}{2} = \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{2} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} S_{BME} + S_{OBA} &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \sqrt{3} \cos x - 2) dx \right| = \\ &= \left| [-\cos x + \sqrt{3} \sin x - 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| = |\sqrt{3} - \pi + 1| = \pi - \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

E quindi

$$\begin{aligned} S_{ADE} &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{7}{2} - \pi + \pi\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} + \pi - \sqrt{3} - 1 - \frac{7}{2} + 2\sqrt{3} = \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \pi\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

che è l'area richiesta dal problema.

2.

1974: SECONDO PROBLEMA

SONO ASSEGNATE DUE CIRCONFERENZE C E C' ESTERNE FRA LORO E RISPETTIVAMENTE DI CENTRI O E O' E RAGGI r ED $\frac{r}{2}$.

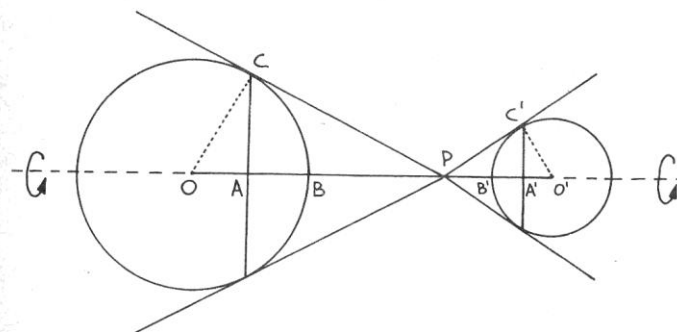
SUL SEGMENTO $\overline{OO'} = a$ SI PRENDA UN GENERICO PUNTO P NON INTERNO ALLE DUE CIRCONFERENZE E SI CONDUCA-NO DA ESSO LE RETTE TANGENTI A C E C' . GLI ARCHI AVENTI PER ESTREMI I PUNTI DI CONTATTO ED INTERSECANTI IL SEGMENTO OO' GENERANO, IN UNA ROTAZIONE DI 180° ATTORNO AD OO' , DUE CALOTTE SFERICHE.

POSTO $\overline{OP} = x$, SI DETERMINI LA POSI-ZIONE DI P IN CORRISPONDENZA DELLA QUALE RISULTA MASSIMA LA SOMMA DELLE AREE DELLE DUE CALOTTE.

Ricordiamo innanzitutto che l'area di una calotta è data dalla formula

$$S = 2\pi \cdot r \cdot h$$

dove r è il raggio della sfera, cui appartiene la calotta e h il suo "spessore"



Risulta

$$OB = r$$

$$O'B' = \frac{r}{2}$$

$$OO' = a$$

$$OP = x$$

$$O'P = a - x$$

La variabile x è vincolata fra i limiti

$$r \leq x \leq a - \frac{r}{2}$$

(1)

Calcoliamo gli "spessori" delle due calotte, cioè la lunghezza dei segmenti AB e $A'B'$.

Poiché il triangolo OPC è rettangolo, possiamo calcolare OA applicando il primo teorema di

Euclide

$$OC^2 = OA \cdot OP$$

$$OA = \frac{OC^2}{OP} = \frac{r^2}{x}$$

da cui

$$AB = OB - OA = r - \frac{r^2}{x}$$

E similmente, per il triangolo $O'PC'$, avremo

$$O'C'^2 = O'A' \cdot O'P$$

$$O'A' = \frac{O'C'^2}{O'P} = \frac{\frac{r^2}{4}}{2-x} = \frac{r^2}{4a-4x}$$

da cui

$$A'B' = O'B' - O'A' = \frac{r}{2} - \frac{r^2}{4a-4x}$$

Per quanto ricordato all'inizio le superfici delle due calotte sono le seguenti:

$$\begin{cases} S_1 = 2\pi \cdot OB \cdot AB \\ S_2 = 2\pi \cdot O'B' \cdot A'B' \end{cases}$$

cioè, sostituendo espressioni sopra ricavate, si avrà:

$$\begin{cases} S_1 = 2\pi r \left(r - \frac{r^2}{x} \right) = 2\pi r^2 \left(1 - \frac{r}{x} \right) \\ S_2 = 2\pi \frac{r}{2} \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{4a-4x} \right) = \pi \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r}{2a-2x} \right) \end{cases}$$

La somma delle superfici delle due calotte costituisce, al variare della x , la funzione seguente

$$y = S_1 + S_2$$

$$y = 2\pi r^2 \left(1 - \frac{r}{x} \right) + \frac{\pi r^2}{2} \left(1 - \frac{r}{2a-2x} \right)$$

$$y = 2\pi r^2 - \frac{2\pi r^3}{x} + \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^3}{4a-4x}$$

$$y = \frac{5\pi r^2}{2} - \frac{2\pi r^3}{x} - \frac{\pi r^3}{4a-4x}$$

Il valore massimo di tale funzione si trova, al solito, uguagliando a zero la sua derivata prima (tenendo presente che π e r sono delle costanti)

$$y' = 0 + \frac{2\pi r^3}{x^2} - \frac{\pi r^3}{4(a-x)^2} = 0$$

$$\frac{\cancel{2\pi r^3}}{x^2} - \frac{\cancel{\pi r^3}}{4(a^2-2ax+x^2)} = 0$$

$$\frac{2}{x^2} = \frac{1}{4(a^2 - 2ax + x^2)}$$

$$8(a^2 - 2ax + x^2) = x^2$$

$$7x^2 - 16ax + 8a^2 = 0$$

$$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 56a^2}}{7} = \frac{8a \pm \sqrt{8a^2}}{7} = \frac{8a \pm 2a\sqrt{2}}{7}$$

$$= \begin{cases} \frac{2a(4+\sqrt{2})}{7} & (\cong 1,5a) \\ \frac{2a(4-\sqrt{2})}{7} & (\cong 0,7a) \end{cases}$$

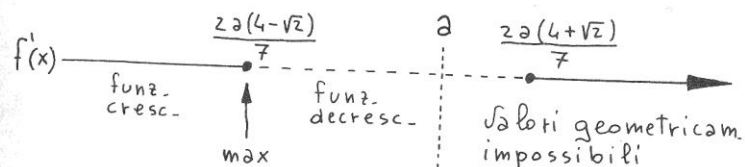
La prima soluzione non è accettabile perché è in contrasto con la limitazione (1) (in quanto fornirebbe una $x > a$), mentre è accettabile la seconda.

Si ha così un'unica soluzione

$$x = \frac{2a(4-\sqrt{2})}{7}$$

che rappresenta il massimo cercato.

Infatti studiando la variazione del segno della y' al variare della x , si ottiene



3.

1974: TERZO PROBLEMA

SI STUDI LA FUNZIONE

$$y = \frac{x^3}{2x^2 - 1}$$

E SE NE DISEGNI IL GRAFICO.

PRESI SULLA CURVA I PUNTI A E B RISPETTIVAMENTE DI ASCISSA $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ E $\frac{\sqrt{3}}{2}$ SI DETERMININO I PUNTI DELL'ARCO AB NEI QUALI LA TANGENTE ALLA CURVA È PARALLELA ALLA RETTA AB.

La funzione è algebrica di terzo grado, ed è simmetrica rispetto all'origine perché:

$$f(x) = -f(-x)$$

L'insieme di definizione è

$$-\infty < x < \infty$$

ad eccezione dei punti $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ in cui si sono due asintoti verticali.

Non si sono asintoti orizzontali perché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{2x^2 - 1} = \pm\infty$$

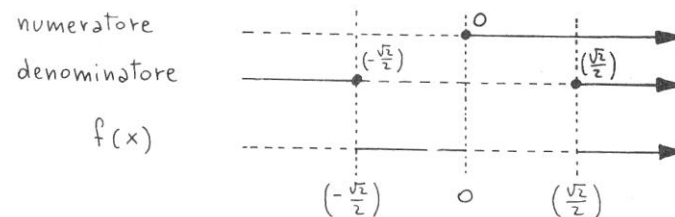
C'è invece un asintoto obliquo, infatti

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2} = m \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x}{2} \right] = 0 = q \end{cases}$$

e quindi la sua equazione è

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x} \quad (1)$$

Studiamo il segno della $f(x)$ per individuare in quali zone la curva si trova sopra o sotto l'asse x .

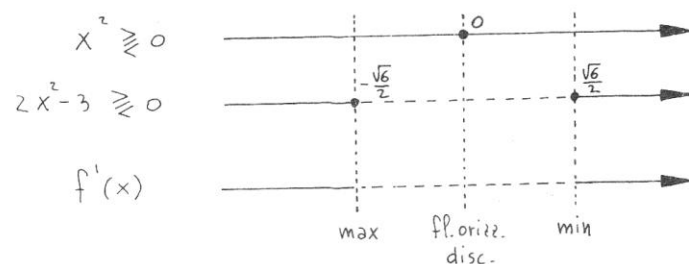


Calcoliamo la derivata prima

$$y' = \frac{3x^2(2x^2-1) - 4x \cdot x^3}{(2x^2-1)^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{x^2(2x^2-3)}{(2x^2-1)^2}} \quad (2)$$

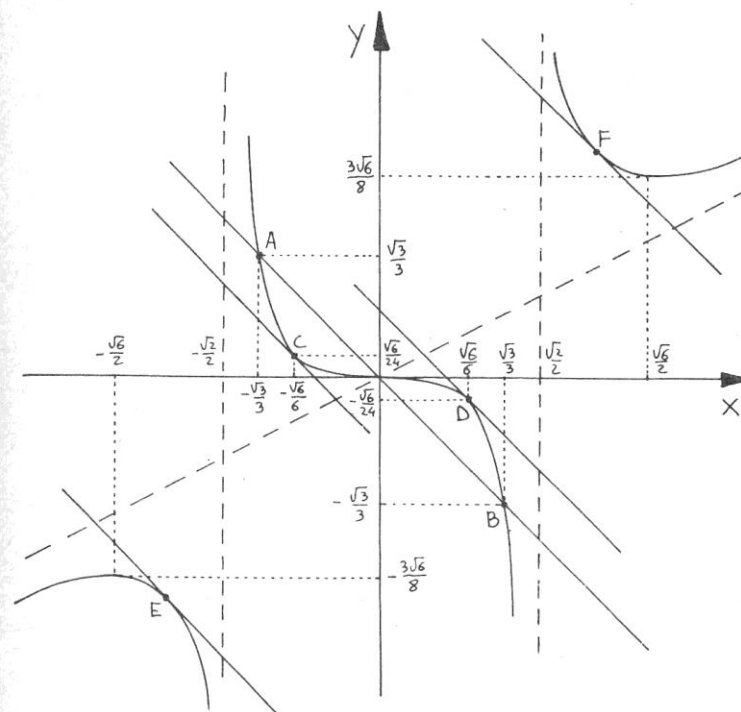
e studiamone il segno (notando che il denominatore è sempre positivo tranne che negli asintoti, e quindi lo possiamo trascurare)



Le ordinate dei tre punti caratteristici trovati, sono

$$\begin{cases} f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3}{2 \cdot \frac{3}{2} - 1} = \frac{-\frac{6\sqrt{6}}{8}}{2} = -\frac{3\sqrt{6}}{8} \\ f(0) = 0 \\ f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3}{2 \cdot \frac{3}{2} - 1} = \frac{3\sqrt{6}}{8} \end{cases}$$

Il grafico corrispondente alla funzione data è perciò



I punti A e B cui si riferisce il testo hanno coordinate

$$A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad B = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

e quindi la retta AB è la bisettrice del secondo e quarto quadrante, il cui coefficiente angolare è $m = -1$.

Dall'osservazione del grafico risulta evidente che esistono quattro punti (C, D, E, F) nei quali la tangente alla curva ha coefficiente angolare $m = -1$.

Per individuare la loro ascissa è sufficiente porre la (2) (che rappresenta anche il coefficiente angolare della retta generica tangente alla curva), uguale a -1

$$\frac{x^2(2x^2-3)}{(2x^2-1)^2} = -1$$

Risolviamo tale equazione

$$2x^4 - 3x^2 = -4x^4 + 4x^2 - 1$$

$$6x^4 - 7x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{12} = \frac{7 \pm 5}{12} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{6} \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$\begin{cases} x = \pm 1 & \text{ascisse dei punti E e F} \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} & \text{ascisse dei punti C e D} \end{cases}$$

Il testo richiede però solo le coordinate dei due punti C e D interni all'arco AB.

Le loro coordinate sono

$$\begin{cases} C \equiv \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{24}\right) \\ D \equiv \left(\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{24}\right) \end{cases}$$

4.

1974: QUARTO PROBLEMA

SI ESPONGANO BREVEMENTE GLI ELEMENTI DELLA TEORIA PER IL CALCOLO DEGLI ASINTOTI DI UNA CURVA DI EQUAZIONE

$$y = f(x)$$

Per la prima volta uno dei quesiti posti ai candidati per la maturità scientifica, non è un problema nel senso tradizionale, ma una traccia teorica da sviluppare.

Chiaramente l'argomento può essere trattato in diversi modi, uno dei quali potrebbe essere il seguente:

ASINTOTI VERTICALI

Le ascisse degli eventuali asintoti verticali coincidono con quei valori finiti della x che rendono infinita la $f(x)$.

Si possono distinguere i seguenti casi fondamentali:

- 1°) Una funzione algebrica intera (cioè un polinomio uguagliato a zero) non ammette

- mai asintoti verticali.
2°) Una funzione algebrica fratta, cioè del tipo

$$\frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

ha tanti asintoti quanti sono i suoi poli [cioè gli zeri della $g(x)$].

- 3°) Una funzione algebrica irrazionale (cioè con l'incognita sotto il segno di radice), ha tanti asintoti verticali quanti sono i suoi poli.

- 4°) Le funzioni trascendenti seno e coseno non hanno asintoti verticali, mentre le funzioni tangente e cotangente ne hanno infiniti a distanza di mezzo periodo uno dall'altro.

- 5°) La funzione trascendente $y = \log f(x)$ [con $f(x) > 0$] ammette tanti asintoti verticali quanti sono gli zeri della $f(x)$.

- 6°) La funzione trascendente $y = a^{f(x)}$

ammette tanti asintoti verticali quanti sono i valori finiti della x che rendono $f(x) = \infty$ (se $a > 1$), oppure che rendono $f(x) = -\infty$ (se $0 < a < 1$) -

ASINTOTI ORIZZONTALI

Basta controllare se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$$

in tal caso l'asintoto orizzontale ha equazione

$$y = l$$

Può avvenire, specie per le funzioni trascendenti, che per $x \rightarrow \pm\infty$ si abbiano due valori finiti distinti: in tal caso esistono due asintoti orizzontali, uno destro e uno sinistro.

ASINTOTI OBLIQUI

Una generica funzione $y = f(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione

$$y = mx + q$$

se esistono e sono finiti entrambi i seguenti limiti

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q \end{cases}$$

Per le funzioni algebriche fratte si può affermare che ammettono sicuramente un asintoto obliquo se il numeratore è un polinomio di un grado più alto del denominatore.