LUGLIO 1977

PRIMO PROBLEMA

IN UN SISTEMA DI ASSI COORDINATI CARTESIANI SI CONSIDERINO LE PARABOLE RAPPRESENTATE DALLE EQUAZIONI

$$y = 3x - x^2 \qquad y = x^2 - 2x$$

NELLA REGIONE FINITA DI PIANO DELIMITATA DALLE DUE CURVE SI DETERMINI IL TRIANGOLO AVENTE UN VERTICE NEL PUNTO COMUNE ALLE DUE CURVE DIVERSO DALL'ORIGINE ED IL LATO OPPOSTO PARALLELO ALL'ASSE DELLE ORDINATE E LA CUI AREA ABBIA VALORE MASSIMO.

SI CALCOLINO INOLTRE LE AREE DELLE REGIONI FINITE LIMITATE DAI LATI DI QUESTO TRIANGOLO E DALLE CURVE STESSE.

La prima parabola $y = -x^2 + 3x$ ha la concavità rivolta verso il basso, vertice nel punto

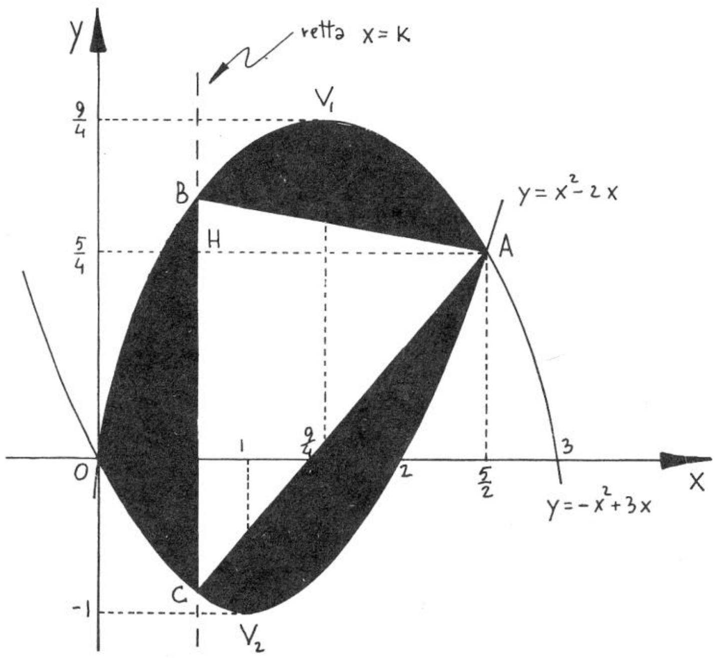
$$V_1 \equiv \left(\frac{3}{2} ; \frac{9}{4}\right)$$

e taglia l'asse x nei punti di ascissa 0 e 3.

La seconda parabola $y = x^2 - 2x$ ha invece la concavità rivolta verso l'alto, vertice nel punto

$$V_2 \equiv (1 ; -1)$$

e taglia l'asse x nei punti di ascissa 0 e 2.



Determiniamo le coordinate del punto di intersezione A

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

$$-x^2 + 3x = x^2 - 2x$$

$$2x^2 - 5x = 0$$

$$x(2x - 5) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \longrightarrow \quad y = 0 \quad \text{coord. dell'origine} \\ x = \frac{5}{2} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{5}{4} \quad \text{coord. del punto A} \end{cases}$$

Tracciando la retta verticale di equazione x=k si determina il triangolo ABC.

Mettendo a sistema tale retta con ciascuna delle due parabole, si ottengono le coordinate dei punti B e C.

$$B \equiv (K ; 3K - K^2)$$

$$C \equiv (K ; K^2 - 2K)$$

e quindi si ha

$$BC = 3K - K^2 - (K^2 - 2K)$$

$$\boxed{BC = K(5-2K)}$$

E' inoltre $\boxed{AH = \frac{5}{2} - K}$

e quindi l'area del triangolo ABC è

$$S = K(5-2K) \cdot \frac{5-2K}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{K(5-2K)^2}{4}$$

Usando le variabili x e y, più consuete, dobbiamo ora massimizzare la funzione

$$y = \frac{x(5-2x)^2}{4}$$

in cui, per ragioni geometriche, deve essere

$$0 < x < \frac{5}{2}$$

La derivata prima è

$$y' = \frac{1 \cdot (5-2x)^2}{4} + \frac{x \cdot 2(5-2x) \cdot (-2)}{4}$$

$$y' = \frac{12x^2 - 40x + 25}{4}$$

Studiandone il segno si ha

e perciò il triangolo ABC ha area massima per

$$\boxed{K = \frac{5}{6}}$$

Passiamo ora al calcolo delle superfici colorate S_1, S_2, S_3, corrispondenti al caso in cui il triangolo ABC ha area massima.

Cominciamo dall'ultima, perchè più breve

$$S_3 = \int_0^{\frac{5}{6}} [3x - x^2 - (x^2 - 2x)]\,dx = \int_0^{\frac{5}{6}} (-2x^2 + 5x)\,dx =$$

$$= \left[-2\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{5}{6}} = -\frac{125}{324} + \frac{125}{72} = \frac{875}{648}$$

Per il calcolo di S_1 occorre prima determinare l'equazione della retta passante per A e B, che è

$$A \equiv \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{4}\right) \quad B \equiv \left(\frac{5}{6}; \frac{65}{36}\right) \longrightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{25}{12}$$

e perciò

$$S_1 = \int_{\frac{5}{6}}^{\frac{5}{2}} \left[-x^2+3x-\left(-\frac{1}{3}x+\frac{25}{12}\right)\right] dx = \int_{\frac{5}{6}}^{\frac{5}{2}} \left(-x^2+\frac{10}{3}x-\frac{25}{12}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{3}-\frac{25x}{12}\right]_{\frac{5}{6}}^{\frac{5}{2}} = \dots = \frac{125}{162}$$

Anche per S_2 determiniamo prima l'equazione della retta passante per A e C.

$$A \equiv \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{4}\right) \qquad C \equiv \left(\frac{5}{6}; -\frac{35}{36}\right) \longrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{25}{12}$$

e quindi

$$S_2 = \int_{\frac{5}{6}}^{\frac{5}{2}} \left[\frac{4}{3}x - \frac{25}{12} - (x^2-2x)\right] dx = \int_{\frac{5}{6}}^{\frac{5}{2}} \left(-x^2+\frac{10}{3}x-\frac{25}{12}\right)dx =$$

$$= \frac{125}{162}$$

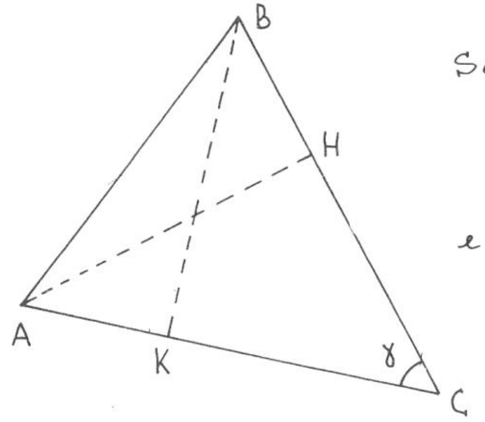
in quanto sia funzione integranda che estremi di integrazione sono uguali a quelli del calcolo di S_1.

13.

1977: SECONDO PROBLEMA

I TRE PUNTI A, B, C, NON ALLINEATI, SONO VERTICI DI UN TRIANGOLO ABC I CUI LATI BC E CA SONO LUNGHI RISPETTIVAMENTE a, b. SI DICA COME DEVE ESSERE SCELTO L'ANGOLO $A\hat{C}B = \gamma$ AFFINCHÈ LA SOMMA DEI QUADRATI DELLE ALTEZZE DEL TRIANGOLO RELATIVE AI LATI BC E CA, DIMINUITA DEL QUADRATO DEL LATO AB, SIA MASSIMA.

POSTO $b = ma$ $(m>0)$, SI DETERMINI PER QUALE VALORE DI m TALE ANGOLO ASSUME AMPIEZZA MINIMA.



Sono noti

$BC = a$

$AC = b$

e deve essere

$0° < \gamma < 180°$

Valgono le seguenti espressioni

$$\begin{cases} \dfrac{AH}{AC} = \text{sen}\,\gamma \\ \dfrac{BK}{BC} = \text{sen}\,\gamma \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} AH = b \cdot \text{sen}\,\gamma \\ BK = a \cdot \text{sen}\,\gamma \end{cases}$$

o anche, quadrando i membri,

$$\boxed{\begin{matrix} AH^2 = b^2\,\text{sen}^2\gamma \\ BK^2 = a^2\,\text{sen}^2\gamma \end{matrix}} \qquad (1)$$

Inoltre, per il teorema di Carnot, si ha

$$\boxed{AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} \qquad (2)$$

Possiamo ora applicare la relazione fornita dal testo

$$y = AH^2 + BK^2 - AB^2$$

sostituendo in essa le (1) e (2) :

$$y = b^2\,\text{sen}^2\gamma + a^2\,\text{sen}^2\gamma - a^2 - b^2 + 2ab\cos\gamma$$

$$y = \text{sen}^2\gamma\,(a^2+b^2) + 2ab\cos\gamma - a^2 - b^2$$

E' questa la funzione da massimizzare. Calcoliamo la derivata prima (ricordando che γ è la variabile indipendente mentre a e b sono costanti)

$$y' = 2\,\text{sen}\,\gamma\cos\gamma\,(a^2+b^2) - 2ab\,\text{sen}\,\gamma$$

Fattorizzando e uguagliando a zero si ha

$$2\,\text{sen}\,\gamma\left[\cos\gamma\,(a^2+b^2) - ab\right] = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\text{sen}\,\gamma = 0 \longrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \gamma = \pi \end{cases}$$ entrambe da scartare perchè risulterebbero A,B,C allineati

$$\cos\gamma = \frac{ab}{a^2+b^2} \longrightarrow \boxed{\gamma = \arccos\frac{ab}{a^2+b^2}} \qquad (3)$$

Quest'ultima soluzione è accettabile perchè la frazione

$$\frac{ab}{a^2+b^2}$$

è contemporaneamente maggiore di zero (in quanto $a>0$, $b>0$) e minore di uno. Infatti

$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab \geq 0$$

$$a^2+b^2 \geq 2ab$$

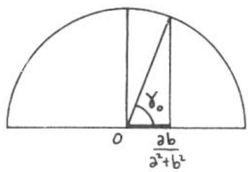
e quindi a maggior ragione

$$a^2+b^2 > ab$$

da cui si ricava, appunto,

$$\frac{ab}{a^2+b^2} < 1$$

Studiamo ora il segno della derivata prima:



$$\begin{cases} \text{Per angoli} < \gamma_0 \longrightarrow \cos\gamma > \dfrac{ab}{a^2+b^2} \\ \text{Per angoli} > \gamma_0 \longrightarrow \cos\gamma < \dfrac{ab}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Perciò

$$f'(\gamma) \quad \overset{\frac{ab}{a^2+b^2}}{\underset{\text{max}}{\bullet}}$$

Dunque la (3) rappresenta il valore di γ per cui la relazione proposta ha un massimo.

Poniamo ora $b = ma$ (con $m>0$) nella relazione

$$\cos\gamma = \frac{ab}{a^2+b^2}$$

Si ottiene

$$\cos\gamma = \frac{ma^2}{a^2+m^2a^2} \longrightarrow \cos\gamma = \frac{m}{1+m^2}$$

che è la funzione da minimizzare.

Ricordiamo però che l'angolo γ può variare fra 0° e 180°, e che in questo intervallo all'aumentare di γ il $\cos\gamma$ è sempre decrescente.

Quindi se poniamo

$$\begin{cases} \cos\gamma = y \\ m = x \end{cases}$$

si ha la funzione

$$\boxed{y = \frac{x}{1+x^2}} \qquad (4)$$

e il valore minimo di γ corrisponde ad un massimo per la funzione (4).

Essa passa per l'origine ed ha un solo asintoto orizzontale coincidente con l'asse x. La derivata è

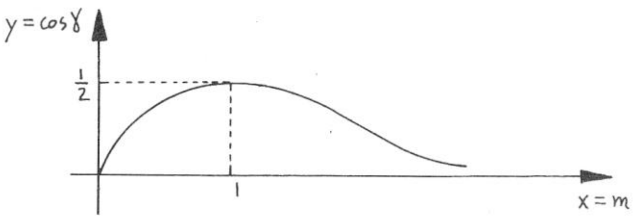
$$y' = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Studiamone il segno (del solo numeratore in quanto il denominatore è sempre positivo)

I valori negativi non sono permessi perchè deve essere $m > 0$.

Il grafico della (4) è allora il seguente



La (4) ammette un massimo, in corrispondenza del quale

$$\cos \gamma = \frac{1}{2}$$

e quindi

$$\boxed{\gamma = 60°}$$

è il valore minimo cercato.

14.

1977: TERZO PROBLEMA

DATA LA FUNZIONE

$$y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$$

SI DETERMININO I COEFFICIENTI a, b IN MODO CHE PER $x = \frac{2}{3}\pi$ SIA $y = 1$ E CHE I VALORI ESTREMANTI DI y SIANO -2 E 2.

SE NE DISEGNI IL GRAFICO NELL'INTERVALLO $0 \leq x \leq 2\pi$.

POSTO

$$y = c \operatorname{sen}(x + \varphi)$$

SI CALCOLINO c, φ IN MODO CHE QUESTA FUNZIONE COINCIDA CON QUELLA ASSEGNATA.

FATTE LE SOSTITUZIONI $y = s$, $x = 2\pi t$, DOVE s RAPPRESENTA LO SPOSTAMENTO DALL'ORIGINE DI UN PUNTO P CHE SI MUOVE SU DI UNA RETTA NEL TEMPO t, SI AGGIUNGA, FACOLTATIVAMENTE, LA DESCRIZIONE DEL MOTO DI P, DETERMINANDO, IN PARTICOLARE, GLI ISTANTI NEI QUALI LA VELOCITÀ È NULLA E QUELLI NEI QUALI È MASSIMA.

Imponendo alla funzione generica di passare per il punto di coordinate

$$\left(\frac{2}{3}\pi\,;\,1\right)$$

si ottiene

$$1 = a\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2}$$

$$\boxed{a\sqrt{3} - b = 2} \qquad (1)$$

Calcoliamo poi la derivata prima e uguagliamola a zero

$$y' = a\cos x - b\,\mathrm{sen}\,x = 0$$

cioè

$$b\,\mathrm{sen}\,x = a\cos x$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,x = \frac{a}{b}} \qquad (2)$$

Dalla trigonometria possiamo ricavare le relazioni seguenti

$$\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha$$

e cioè

$$\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{1-\mathrm{sen}^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha \longrightarrow \mathrm{sen}^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{sen}^2\alpha\,(1+\mathrm{tg}^2\alpha) = \mathrm{tg}^2\alpha \longrightarrow \mathrm{sen}\,\alpha = \pm\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$$

e anche

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha \longrightarrow 1-\cos^2\alpha = \cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \cos^2\alpha\,(1+\mathrm{tg}^2\alpha) = 1 \longrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$$

Il testo (usando il termine improprio di "estremanti") afferma che nei punti individuati dalla (2), la funzione assume ordinate pari a ± 2.

Quindi in tali punti la funzione diviene

$$a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x = \pm 2$$

cioè, sfruttando le relazioni sopra ricavate,

$$a\cdot\left(\pm\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}}\right) + b\left(\pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}}\right) = \pm 2$$

$$\pm\frac{a\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}} \pm \frac{b}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}} = \pm 2$$

o anche, per la (2),

$$\pm\frac{a\cdot\frac{a}{b}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}} \pm \frac{b}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}} = \pm 2$$

$$\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm 2$$

che, potendosi scrivere

$$\pm \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm 2$$

ci permette di tralasciare il doppio segno. Si ha perciò

$$\sqrt{a^2+b^2} = 2$$

cioè

$$\boxed{a^2+b^2=4} \qquad (3)$$

Risolvendo il sistema costituito dalle (1) e (3), si ottengono le due soluzioni

$$\begin{cases} a=0 \\ b=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=1 \end{cases}$$

che, sostituite nell'equazione generica, forniscono le due funzioni

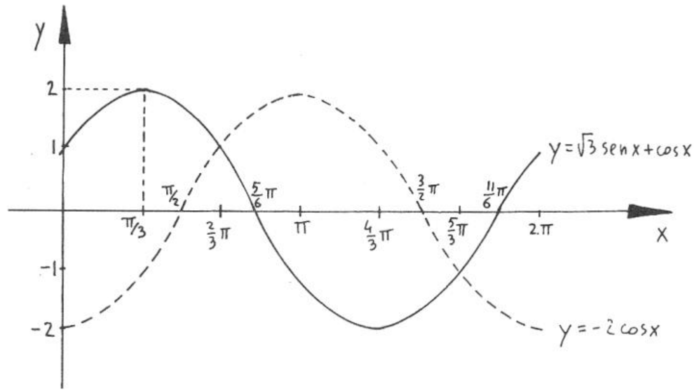
$$\boxed{y=-2\cos x} \qquad (4)$$

$$\boxed{y=\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x+\cos x} \qquad (5)$$

entrambe accettabili perchè soddisfano tutti i requisiti richiesti.

Studiando separatamente le due funzioni e

riportandole su uno stesso grafico, si ha



Consideriamo ora l'espressione

$$\boxed{y = c\ \mathrm{sen}\,(x+\varphi)} \qquad (6)$$

e determiniamo per quali valori di c e φ la (6) si trasforma nelle (4) e (5).

Applicando le formule di addizione e sottrazione alla (6), si ha

$$y = c\ \mathrm{sen}\,x\ \cos\varphi + c\ \cos x\ \mathrm{sen}\,\varphi$$

Tenendo presente che la variabile è la x, questa espressione risulta identica alla (4) o alla (5) se i coefficienti corrispondenti sono uguali.

Nel primo caso si ha

$$c\ \text{sen}\,x\,\cos\varphi + c\cos x\ \text{sen}\,\varphi = 0\cdot\text{sen}\,x - 2\cos x$$

e quindi deve essere

$$\begin{cases} c\cdot\cos\varphi = 0 \\ c\cdot\text{sen}\,\varphi = -2 \end{cases}$$

cioè

$$\cos\varphi = 0 \longrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \varphi = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

e sostituendo nella seconda equazione del sistema si trova rispettivamente

$$\begin{cases} c = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Perciò la (4) diviene uguale alla (6) quando

$$\boxed{\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ c = -2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \varphi = \frac{3}{2}\pi \\ c = 2 \end{cases}}$$

Nel secondo caso invece si ha

$$c\ \text{sen}\,x\cos\varphi + c\cos x\ \text{sen}\,\varphi = \sqrt{3}\ \text{sen}\,x + \cos x$$

e quindi deve essere

$$\begin{cases} c\cos\varphi = \sqrt{3} \\ c\ \text{sen}\,\varphi = 1 \end{cases}$$

Dividendo membro a membro si ha

$$\text{cotg}\,\varphi = \sqrt{3} \longrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{6} \\ \varphi = \frac{7}{6}\pi \end{cases}$$

sostituendo nella seconda equazione del sistema, si ha rispettivamente

$$\begin{cases} c = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

E perciò la (5) diviene uguale alla (6) quando

$$\boxed{\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{6} \\ c = 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \varphi = \frac{7}{6}\pi \\ c = -2 \end{cases}}$$

Quindi le funzioni (4) e (5) rappresentano due casi particolari della funzione più generica (6).

Se in quest'ultima poniamo

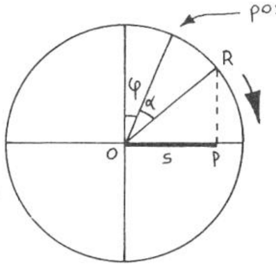
$$\begin{cases} y = s \\ x = 2\pi t \end{cases}$$

si ottiene

$$\boxed{s = c\ \text{sen}(2\pi t + \varphi)}$$

ben nota in fisica e che esprime la legge oraria del moto armonico.

posiz. corrisp. all'ist. iniziale



Se R si muove con moto circolare uniforme con velocità angolare $\omega = \frac{\alpha}{t}$ il punto P si muove con moto armonico la cui legge oraria è

$$s = OR \cdot \text{sen}\,(\alpha + \varphi)$$

dove φ è lo sfasamento, cioè l'angolo già descritto dal punto R quando si fa partire il cronometro.

Essa può anche essere scritta

$$s = OR \cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

Nel nostro caso è $OR = 2$ (vanno cioè scartate le soluzioni negative perchè non hanno significato geometrico), e $\omega = 2\pi$. Quindi il periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ sec}$$

Considerando gli sfasamenti corrispondenti alle due soluzioni accettabili, si hanno i due moti

armonici seguenti

$$\boxed{s = 2\ \text{sen}\left(2\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)} \qquad \boxed{s = 2\ \text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

La velocità di P lungo il diametro orizzontale è massima (in modulo) in O e nulla agli estremi del diametro stesso. Cioè è massima quando

$$2\pi t + \frac{3}{2}\pi = K\pi \qquad 2\pi t + \frac{\pi}{6} = K\pi$$

$$t = \frac{K}{2} - \frac{3}{4} \qquad t = \frac{K}{2} - \frac{1}{12}$$

ed è minima quando

$$2\pi t + \frac{3}{2}\pi = K\frac{\pi}{2} \qquad 2\pi t + \frac{\pi}{6} = K\frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{K}{4} - \frac{3}{4} \qquad t = \frac{K}{4} - \frac{1}{12}$$

15.

1977: QUARTO PROBLEMA

SI ENUNCI LA REGOLA DI DE l'HÔPITAL E SE NE DIA UN ESEMPIO DI APPLICAZIONE.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue e derivabili in un certo intervallo $a \longmapsto b$.
Supponiamo che entrambe le funzioni diventino infinitesime per $x \longrightarrow c$ (dove c è un punto interno all'intervallo suddetto).
Risulta quindi

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

Ebbene, la regola di De L'Hôpital afferma che

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

purchè sia $$g'(c) \neq 0$$

Facciamo un esempio di applicazione della

regola.
Il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

può facilmente essere ricavato applicando la regola de l'Hôpital. Dopo aver constatato che l'immediata sostituzione $x = 0$ nella funzione fornisce la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, derivando separatamente numeratore e denominatore si ottiene subito

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

È da notare che la regola de l'Hôpital può essere applicata anche alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ perchè si può scrivere

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \frac{1}{0} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{0}$$