1982 Sessione ordinaria

Delle seguenti questioni il candidato risolva quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in modo che la curva da essa rappresentata tocchi la retta $y = x$ nel punto $A(1; 1)$ e la retta $y = 0$ nel punto $B(3; 0)$. Se ne disegni il grafico. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due rette e dall'arco di curva AB.

2) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri il triangolo equilatero ABC avente il vertice A nel punto (3; 0), il vertice B sull'asse delle ordinate e il vertice C sulla retta $x = 3$. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola da essa rappresentata passi per i vertici A, B del triangolo e divida questo in due parti delle quali quella determinata dal lato AB sia metà dell'altra.

3) Si studi la funzione $y = \text{sen}^3 x + \cos^3 x$ nell'intervallo chiuso $[0; 2\pi]$ e se ne disegni il grafico.

4) Si calcoli la somma $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$ per $n \in N$ tendente all'infinito.

SOLUZIONI PROPOSTE DA DE ROSA NICOLA

Problema 1

Imponendo il passaggio della curva di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ per il punto A(1,1) si ha la condizione

$$a+b+c+d=1$$

Imponendo invece il passaggio per $B(3; 0)$ si ottiene:

$$27a+9b+3c+d=0$$

La condizione per cui la curva tocca la retta $y=x$ in A(1,1) si esprime matematicamente col fatto che la tangente alla curva in A(1,1) ha coefficiente angolare unitario:

$$y^I(x=1)=1 \rightarrow \left(3ax^2+2bx+c\right)_{x=1}=1 \rightarrow 3a+2b+c=1$$

Analogamente **l**a condizione per cui la curva tocca la retta $y=0$ in B(3,0) si esprime matematicamente col fatto che la tangente alla curva in B(3,0) ha coefficiente angolare nullo:

$$y^I(x=3)=0 \rightarrow \left(3ax^2+2bx+c\right)_{x=3}=0 \rightarrow 27a+6b+c=0$$

Alla fine dobbiamo risolvere il sistema seguente di 4 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 27a+9b+3c+d=0 \\ 3a+2b+c=1 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases}$$

Per risolverlo potremo subito applicare Cramer; tuttavia avendo a che fare con determinanti di matrici 4*4 il calcolo diventa molto laborioso. In realtà possiamo ricondurci a studiare un sistema di 3 equazioni in 3 incognite e dopo calcolarci la quarta incognita.
Infatti dalla prima ricaviamo: $d = 1 - a - b - c$ che sostituita nella seconda fornisce $27a + 9b + 3c + 1 - a - b - c = 0 \rightarrow 26a + 8b + 2c = -1$ per cui il sistema di 3 equazioni in 3 incognite diventa:

$$\begin{cases} 26a + 8b + 2c = -1 \\ 3a + 2b + c = 1 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases}$$

Ora applichiamo Cramer, dal momento che sappiamo trattare facilmente determinanti 3*3:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 26 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 27 & 6 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2 + 12 - 8 + 6}{52 + 216 + 36 - 108 - 24 - 156} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 26 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 27 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{16} = \frac{26 - 27 - 54 + 3}{16} = -\frac{13}{4}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 8 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 27 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{16} = \frac{216 - 18 + 54 - 156}{16} = 6$$

$$d = 1 - a - b - c = -\frac{9}{4}$$

La curva ha quindi equazione:

$$y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{4}x^2 + 6x - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}(x-3)^2(2x-1)$$

Tale curva ha come dominio tutto R, interseca l'asse delle ascisse in A(1,1) e B(3,0), quello delle ordinate in $\left(0,-\frac{9}{4}\right)$, è positiva per $x \in \left(\frac{1}{2},3\right) \cup (3,+\infty)$ e non presenta asintoti.
Separatamente studiamo la monotonia: le derivate sono:

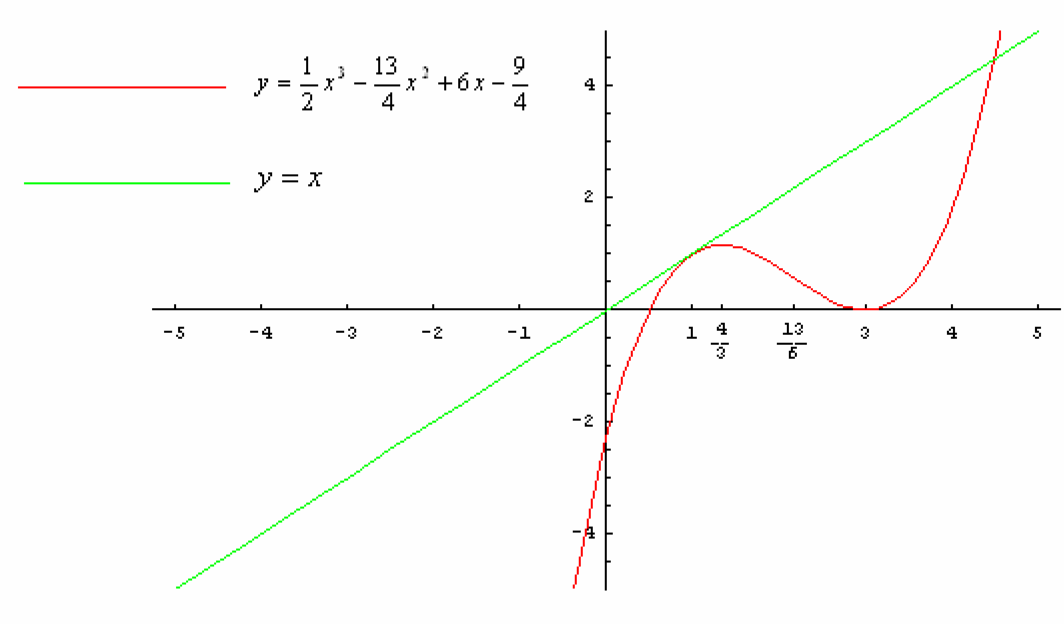
$$y^{I}(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{2}x+6=\frac{3x^2-13x+12}{2}=\frac{(x-3)(3x-4)}{2}>0 \Rightarrow x>3 \cup x<\frac{4}{3}$$

$$y^{II}(x)=3x-\frac{13}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{13}{6} \rightarrow \left(\frac{13}{6},\frac{125}{216}\right) \text{ è un flesso}$$

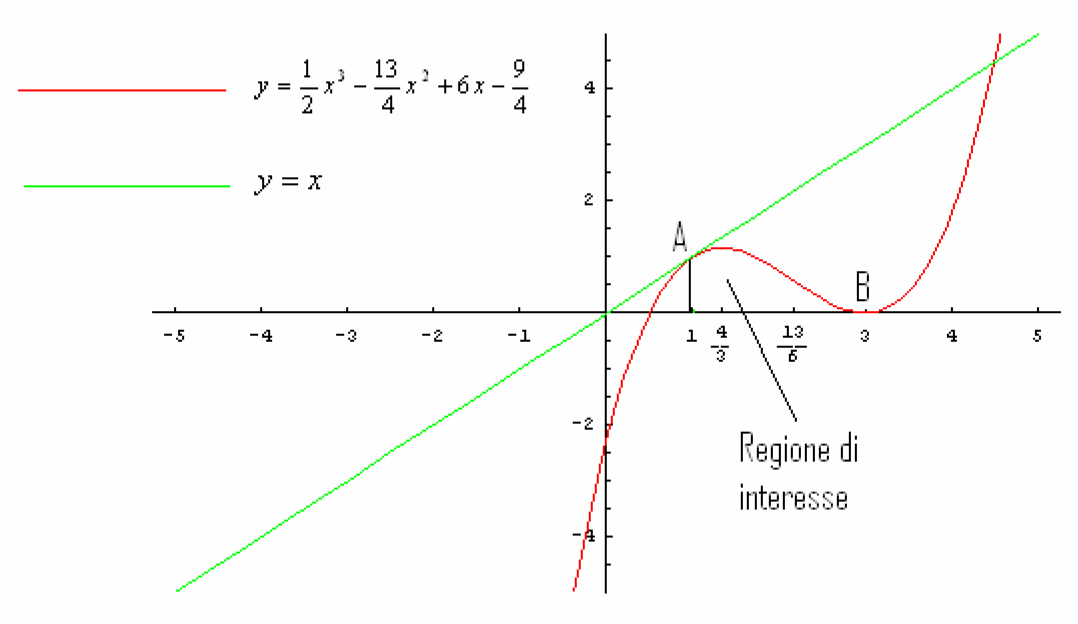
$$y^{II}(3)=\frac{5}{2}>0 \rightarrow (3,0) \text{ è un minimo relativo}$$

$$y^{II}\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{5}{2}<0 \rightarrow \left(\frac{4}{3},\frac{125}{108}\right) \text{ è un massimo relativo}$$

Ecco il grafico:



Per il calcolo dell’area consideriamo la figura sottostante:



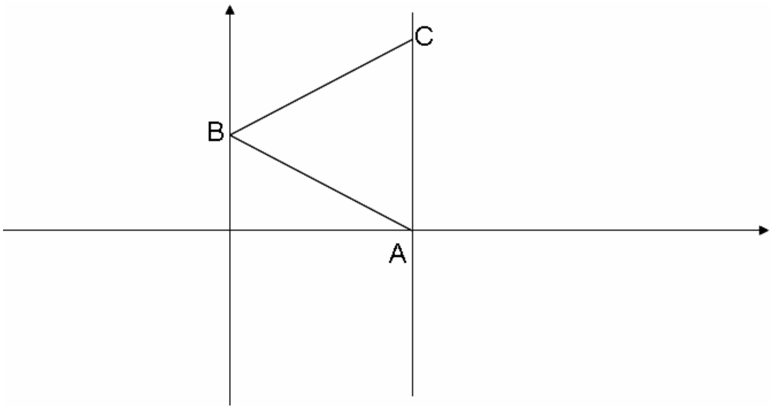
L’area che ci interessa è:

$$A = \int_1^3 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{4}x^2 + 6x - \frac{9}{4} \right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{13x^3}{12} + 3x^2 - \frac{9x}{4} \right]_1^3 =$$

$$\frac{81}{8} - \frac{117}{4} + 27 - \frac{27}{4} - \frac{1}{8} + \frac{13}{12} - 3 + \frac{9}{4} = \frac{4}{3}$$

Problema 2

Si consideri la seguente figura che rappresenta la geometria del problema:



Il punto B generico ha coordinate B=(0,y), mentre C=(3,z).

Ora per essere equilatero deve aversi AB=BC=AC.

Ora:

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{9+y^2} \\
BC &= \sqrt{(y-z)^2+9} \\
AC &= |z|
\end{aligned}$$

Per cui deve aversi:

$$\begin{cases}
\sqrt{9+y^2} = \sqrt{(y-z)^2+9} \\
\sqrt{(y-z)^2+9} = |z| \\
\sqrt{9+y^2} = |z|
\end{cases}$$

Elevando al quadrato si ha:

$$\begin{cases}
9+y^2 = (y-z)^2+9 \\
(y-z)^2+9 = z^2 \\
9+y^2 = z^2
\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}
z^2-2yz=0 \\
y^2-2yz+9=0 \\
9+y^2 = z^2
\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}
z=0, z=2y \\
y^2-2yz+9=0 \\
9+y^2 = z^2
\end{cases}$$

Ora la soluzione z=0 non soddisfa le altre due, mentre la soluzione $z=2y$ sia nella seconda che nella terza equazione rimanente comporta:

$$\begin{cases}
y = \pm\sqrt{3} \\
z = \pm 2\sqrt{3}
\end{cases}$$

Per cui i vertici sono:
1)A(3,0),B(0, $\sqrt{3}$),C(3,2 $\sqrt{3}$) oppure
2)A(3,0),B(0,- $\sqrt{3}$),C(3,-2 $\sqrt{3}$)

Noi considereremo come vertici quelli del punto 1) cioè considereremo i vertici

$$A(3,0),B(0,\sqrt{3}),C(3,2\sqrt{3})$$

Imponendo che la parabola passi per i punti A(3,0),B(0, $\sqrt{3}$), si ha:

$$9a+3b+c=0, c=\sqrt{3}$$

da cui $b=\frac{\left(-\sqrt{3}-9a\right)}{3}$ per cui l'equazione diventa

$$y=ax^2-\frac{\left(\sqrt{3}+9a\right)}{3}x+\sqrt{3}$$

La retta AB ha equazione :

$$\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{x-3}{-3}\rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}(3-x)$$

mentre la retta BC ha equazione:

$$\frac{y-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{x}{3}\rightarrow y=\sqrt{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)$$

Ora innanzitutto, affinché la parabola divida il triangolo in 2 parti di area una la metà dell'altra, di cui una formata col lato AB, essa dovrà avere concavità verso il basso e per avere questo il segno del coefficiente x^2 deve essere minore di zero, cioè: $a<0$

Calcoliamo ora eventuali intersezioni tra la retta BC e la parabola: bisogna risolvere la disequazione seguente:

$$\sqrt{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)=ax^2-\frac{\left(\sqrt{3}+9a\right)}{3}x+\sqrt{3}\Rightarrow ax^2-\frac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)}{3}x=0\Rightarrow x=0, x=\frac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)}{3a}$$

Ora vanno distinti due casi:

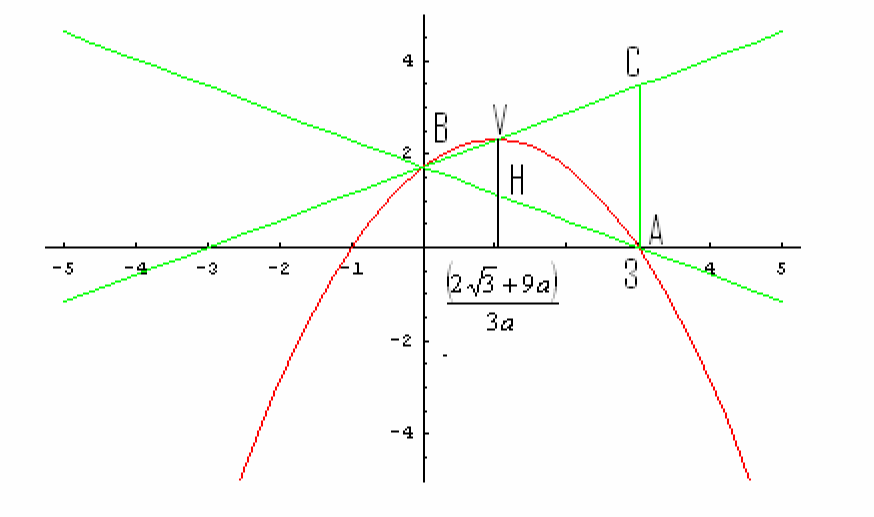
1) $\dfrac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)}{3a} > 0 \Rightarrow a < -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \cup a > 0$ che con la condizione $a < 0$ impone $a < -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$;

2) $\dfrac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)}{3a} \leq 0 \Rightarrow -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \leq a < 0$ che con la condizione $a < 0$ impone ancora $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \leq a < 0$;

Discutiamo i 2 casi partendo dal caso 1.

Caso 1

La geometria del problema è rappresentata nella figura seguente:



L'area S individuata dal lato AB con la parabola è la differenza tra l'area del segmento parabolico formato dall'arco AB col segmento AB e l'area del segmento parabolico BV col segmento BV.

L'area del triangolo equilatero è $A_{ABC} = l^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ per cui l'area individuata dalla parabola col lato AB, essendo metà della restante, risulta essere pari a $\dfrac{1}{3}$ dell'area del triangolo, cioè dobbiamo imporre che:

$$\int_0^3 \left[\left(ax^2 + \frac{\left(-\sqrt{3}-9a\right)}{3}x + \sqrt{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(3-x)\right)\right]dx +$$

$$-\int_0^{\frac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)}{3a}} \left[\left(ax^2 - \frac{\left(\sqrt{3}+9a\right)}{3}x + \sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)\right)\right]dx = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\int_0^3 \left[\left(ax^2 - 3ax\right)\right]dx - \int_0^{\frac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)}{3a}} \left[\left(ax^2 - \frac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)}{3}x\right)\right]dx = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{ax^3}{3} - \frac{3ax^2}{2}\right]_0^3 - \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)x^2}{6}\right]_0^{\frac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)}{3a}} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\left[9a - \frac{27}{2}a\right] - \left[\frac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)^3}{81a^2} - \frac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)^3}{54a^2}\right] = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$-\frac{9a}{2} - \frac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)^3}{81a^2} + \frac{\left(2\sqrt{3}+9a\right)^3}{54a^2} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\left(2\sqrt{3}+9a\right)^3 - 162\sqrt{3}a^2 - 729a^3 = 0 \Rightarrow 4\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+9a\right)\left(\sqrt{3}+9a\right) = 0 \Rightarrow$$

$$a = -\frac{2\sqrt{3}}{9}, a = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

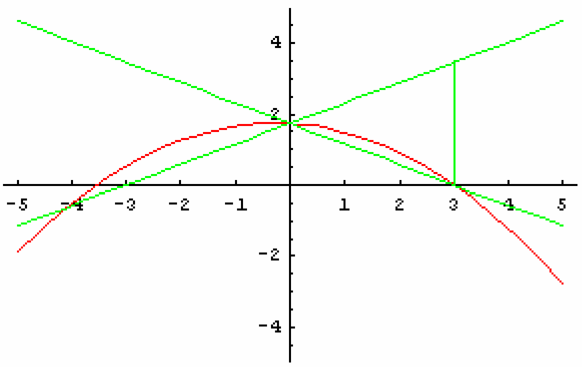
di cui è accettabile solo $a = -\frac{\sqrt{3}}{9}$. Di conseguenza $b = \frac{\left(-\sqrt{3}-9a\right)}{3} = 0$

In tal caso allora si ha la seguente equazione:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{9}x^2 + \sqrt{3}$$

Caso 2

La geometria del problema è:



In tal caso l'area da calcolare è più semplice e dobbiamo imporre:

$$\int_0^3 \left[\left(ax^2 - \frac{\left(\sqrt{3}+9a\right)}{3} x + \sqrt{3} \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(3-x) \right) \right] dx = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\int_0^3 \left[\left(ax^2 - 3ax \right) \right] dx = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{ax^3}{3} - \frac{3ax^2}{2} \right]_0^3 = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\left[9a - \frac{27}{2} a \right] = \sqrt{3} \Rightarrow a = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Anch'esso accettabile da cui $b = \frac{\left(-\sqrt{3}-9a\right)}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

L'equazione della parabola in tal caso è:

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{9} x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} x + \sqrt{3}$$

In conclusione le equazioni delle parabole sono 2:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{9} x^2 + \sqrt{3}$$

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{9} x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} x + \sqrt{3}$$

Problema 3

La funzione $y = \sin^3(x) + \cos^3(x)$ può essere riscritta in questo modo:

$$y = \sin^3(x) + \cos^3(x) = [\sin(x) + \cos(x)][\sin^2(x) + \cos^2(x) - \sin(x)\cos(x)] =$$
$$[\sin(x) + \cos(x)][1 - \sin(x)\cos(x)] = \frac{1}{2}[\sin(x) + \cos(x)][2 - \sin(2x)]$$

In cui si sono sfruttate le relazioni $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Studiamo allora la funzione $y = \frac{1}{2}[\sin(x) + \cos(x)][2 - \sin(2x)]$

Dominio: $[0, 2\pi]$

Intersezione asse x:

$$y = \frac{1}{2}[\sin(x) + \cos(x)][2 - \sin(2x)] = 0 \Leftrightarrow [\sin(x) + \cos(x)] = 0 \Leftrightarrow \cos(x)[\tan(x) + 1] = 0$$
$$\Leftrightarrow \tan(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}$$

Intersezione asse y: $x = 0 \Rightarrow y =!1$

Comportamento agli estremi:

$$x = 0 \Rightarrow y =!1$$
$$x = 2\pi \Rightarrow y =!1$$

Positività:

$$y = \frac{1}{2}[\sin(x) + \cos(x)][2 - \sin(2x)] > 0 \Leftrightarrow [\sin(x) + \cos(x)] >= 0 \Leftrightarrow \cos(x)[\tan(x) + 1] > 0$$

La disequazione viene studiata col metodo del falso sistema, per cui si studia separatamente ogni fattore:

$$\cos(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\tan(x) > -1 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2},\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$$

Mettendo questi risultati sulla stessa retta dei reali si ricava:

$$y = \cos(x)[\tan(x) + 1] > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$$

Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui: non ce ne sono

Crescenza e decrescenza: estremi relativi e flessi:

$$
\begin{aligned}
& y^{I}(x) = 3\sin^2(x)\cos(x) - 3\sin(x)\cos^2(x) \\
& = 3\sin(x)\cos(x)[\sin(x) - \cos(x)] = 3\sin(x)\cos^2(x)[\tan(x) - 1] \geq 0 \Rightarrow \\
& \sin(x)[\tan(x) - 1] \geq 0
\end{aligned}
$$

e la si risolve sempre col metodo del falso sistema:

$$
\begin{aligned}
& \sin(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, \pi] \\
& \tan(x) \geq 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Mettendo questi risultati sulla stessa retta dei reali si ricava:

$$
\sin(x)[\tan(x) - 1] \geq 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]
$$

$$
\begin{aligned}
& y^{II}(x) = -3\sin^3(x) + 6\sin(x)\cos^2(x) - 3\cos^3(x) + 6\sin^2(x)\cos(x) = \\
& -3[\sin(x) + \cos(x)][1 - \sin(x)\cos(x)] + 6\sin(x)\cos(x)[\sin(x) + \cos(x)] = \\
& 3[\sin(x) + \cos(x)][2\sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x) - 1] = 3[\sin(x) + \cos(x)][3\sin(x)\cos(x) - 1] = \\
& 6[\sin(x) + \cos(x)][3\sin(2x) - 2] = 6\cos(x)[\tan(x) + 1][3\sin(2x) - 2] = 0 \Rightarrow \\
& \tan(x) = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4} \\
& \sin(2x) = \frac{2}{3} \Rightarrow x \cong 21°, x \cong 201°, x \cong 79°, x \cong 259° \\
& y^{II}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 0 \\
& y^{II}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} < 0 \\
& y^{II}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -12 < 0 \\
& y^{II}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 12 > 0 \\
& y^{II}(\pi) = 12 > 0
\end{aligned}
$$

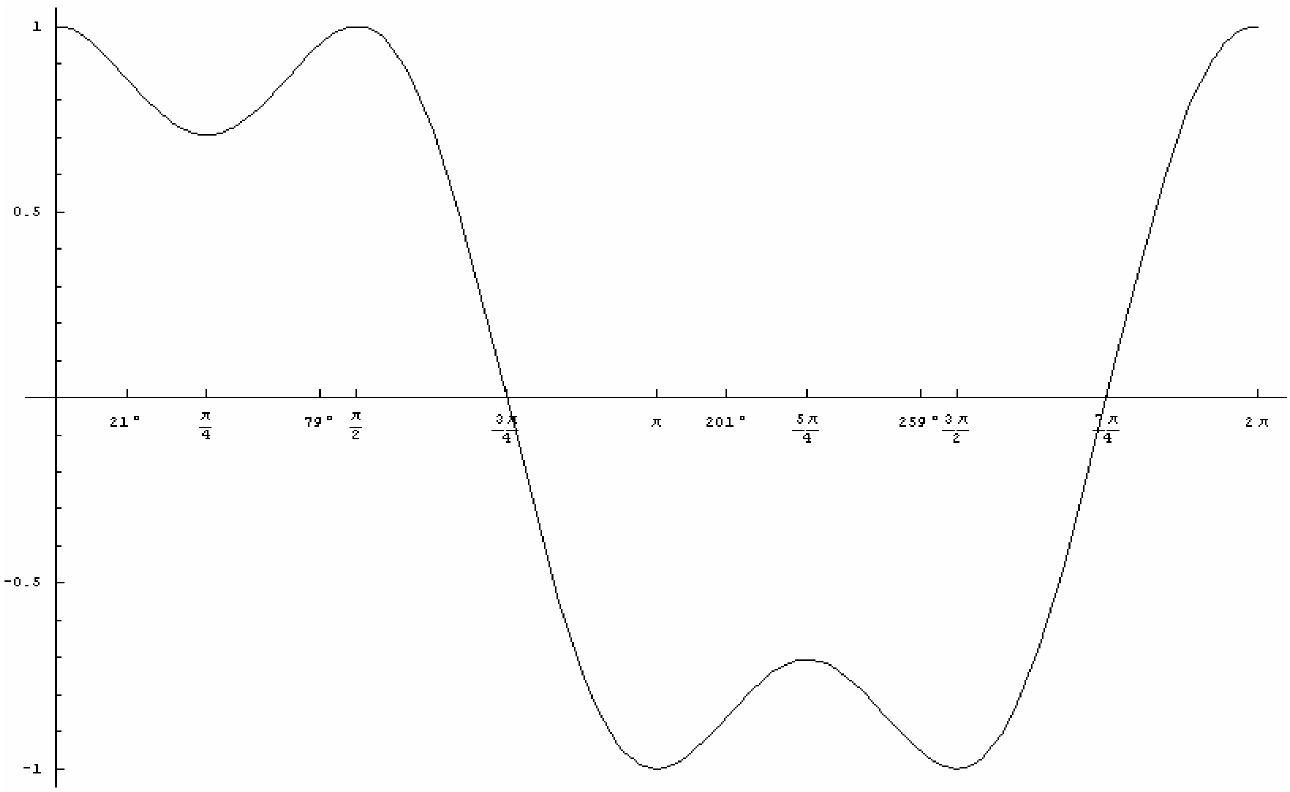
D ciò si evince che i punti $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (\pi, -1)$ sono di minimo relativo;

i punti $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ sono di massimo relativo;

ed i punti le cui ascisse sono $x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}, x \cong 21°, x \cong 201°, x \cong 79°, x \cong 259°$ sono punti di flesso.

Va anche detto che in tal caso i punti $(0,1), (2\pi,1)$, $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ sono anche di massimo assoluto, mentre $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right), (\pi,-1)$ sono anche di minimo assoluto.

Il grafico è sotto presentato:



Problema 4

Ricordiamo che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$$

In tal modo è più facile calcolare la somma della serie.

Infatti la somma *N*-esima sarà:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n(n+1)}\right] = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right] = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right) = 1-\frac{1}{N+1}$$

Per cui la somma della serie sarà:

$$S = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right) = 1$$