M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto A(2,0).

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$

controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.

2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.
3. Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

Soluzione

1)

Un punto generico ha coordinate (x, y) per cui si ha:

$$PO^2 = x^2 + y^2$$
$$PA^2 = (x-2)^2 + y^2$$

Per cui

$$PO^2 + 2PA^2 = 8 \rightarrow x^2 + y^2 + 2\left[(x-2)^2 + y^2\right] = 8 \rightarrow$$
$$3x^2 + 3y^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{8}{3}x = 0$$

Le coordinate del centro sono allora $C = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$ ed il raggio, visto che la circonferenza passa per O=(0,0), è $R = \frac{4}{3}$.

2)

Calcolo punto B:

$$x=2 \to 4+y^2-\frac{16}{3}=0 \to y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Per cui $B=\left(2,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

La tangente alla circonferenza nel punto $B=\left(2,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ avrà equazione

$$y=m(x-2)+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ora per il calcolo del coefficiente angolare si possono seguire due strade, che mostreremo entrambe. La prima si basa sulla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{8}{3}x=0 \\ y=m(x-2)+\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

E sulla successiva imposizione della condizione di tangenza, cioè discriminante nullo.
Risolvendo si ha:

$$x^2+\left[m(x-2)+\frac{2}{\sqrt{3}}\right]^2-\frac{8}{3}x=0 \to x^2+m^2\left(x^2-4x+4\right)+\frac{4}{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}m(x-2)-\frac{8}{3}x=0 \to$$
$$x^2\left(m^2+1\right)+x\left(-4m^2+\frac{4}{\sqrt{3}}m-\frac{8}{3}\right)+\left(4m^2-\frac{8m}{\sqrt{3}}+\frac{4}{3}\right)=0$$

Ora imponendo $\Delta=0$ si ha:

$$\left(-4m^2+\frac{4}{\sqrt{3}}m-\frac{8}{3}\right)^2-4\left(m^2+1\right)\left(4m^2-\frac{8m}{\sqrt{3}}+\frac{4}{3}\right)=0 \to$$
$$\left(16m^4-\frac{32m^3}{\sqrt{3}}+\frac{80m^2}{3}-\frac{64m}{3\sqrt{3}}+\frac{64}{9}\right)-4\left(4m^4-\frac{8m^3}{\sqrt{3}}+\frac{16m^2}{3}-\frac{8m}{\sqrt{3}}+\frac{4}{3}\right)=0 \to$$
$$\frac{16m^2}{3}-\frac{64m}{3\sqrt{3}}+\frac{64}{9}-\frac{16}{3}+\frac{32m}{\sqrt{3}}=0 \to 48\sqrt{3}m^2+96m+16\sqrt{3}=0 \to$$
$$3\sqrt{3}m^2+6m+\sqrt{3}=0 \to 3m^2+2\sqrt{3}m+1=0 \to \left(m\sqrt{3}+1\right)^2=0 \to m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

L'altro modo di procedere, piu' semplice ed intuitivo, è di utilizzare le derivate, ricordando che il coefficiente angolare della tangente è il valore della derivata nell'ascissa del punto di tangenza.
In tal caso però va esplicitata prima la circonferenza come una normale funzione, cioè dobbiamo

esprimerla come $y = f(x)$. Risulta chiaro che in tal caso si ha:

$$y = \pm\sqrt{\frac{8x}{3} - x^2}$$

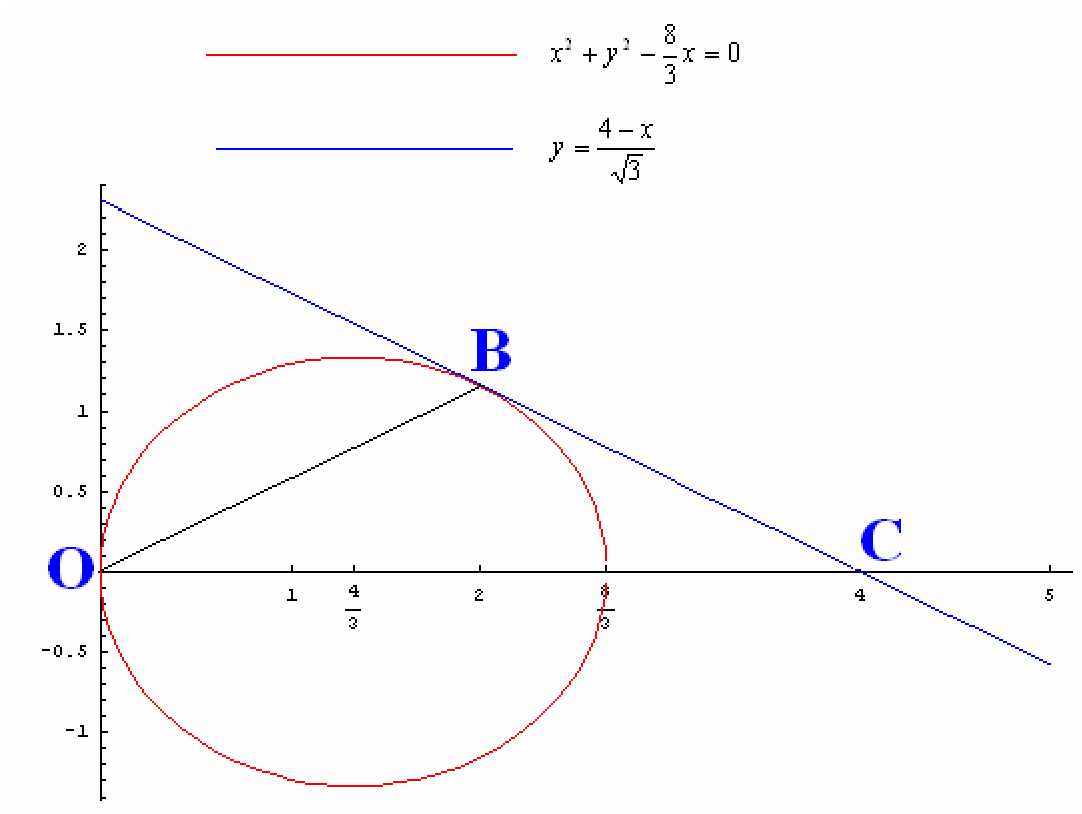
In tal caso, dovendo calcolare la tangente in un punto che si trova nel primo quadrante, allora va considerata la semicirconferenza che si trova nel primo quadrante di equazione $y = \sqrt{\frac{8x}{3} - x^2}$ la cui derivata è

$y' = \frac{\frac{4}{3} - x}{\sqrt{\frac{8x}{3} - x^2}}$, per cui il coefficiente angolare sarà $m = f'(x=2) = \frac{\frac{4}{3} - 2}{\sqrt{\frac{16}{3} - 4}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Il risultato trovato è identico al precedente, ma privo di tanti calcoli.
L'equazione della tangente sarà allora:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2) + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4-x}{\sqrt{3}}$$

Consideriamo la figura sottostante:



A noi interessa calcolare o l'angolo $O\hat{B}C$ o il suo supplementare, cioè quello acuto tra i due.

Innanzitutto in tal caso osserviamo che il triangolo OBC è isoscele.

Infatti $OB = BC = \sqrt{4+\frac{4}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, per cui $O\hat{B}C = \pi - 2B\hat{O}C$

Ma la retta OB ha equazione $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ per cui $B\hat{O}C = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ per cui $O\hat{B}C = \pi - 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} = 120°$ cioè $O\hat{B}C$ è ottuso . Per cui l'angolo acuto richiesto sarà $(180° - 120°) = 60°$

3)

La cubica di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passa per l'origine O=(0,0) e questo implica $d = 0$

Inoltre passa per $B = \left(2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ e questo comporta $8a + 4b + 2c = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 4a + 2b + c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

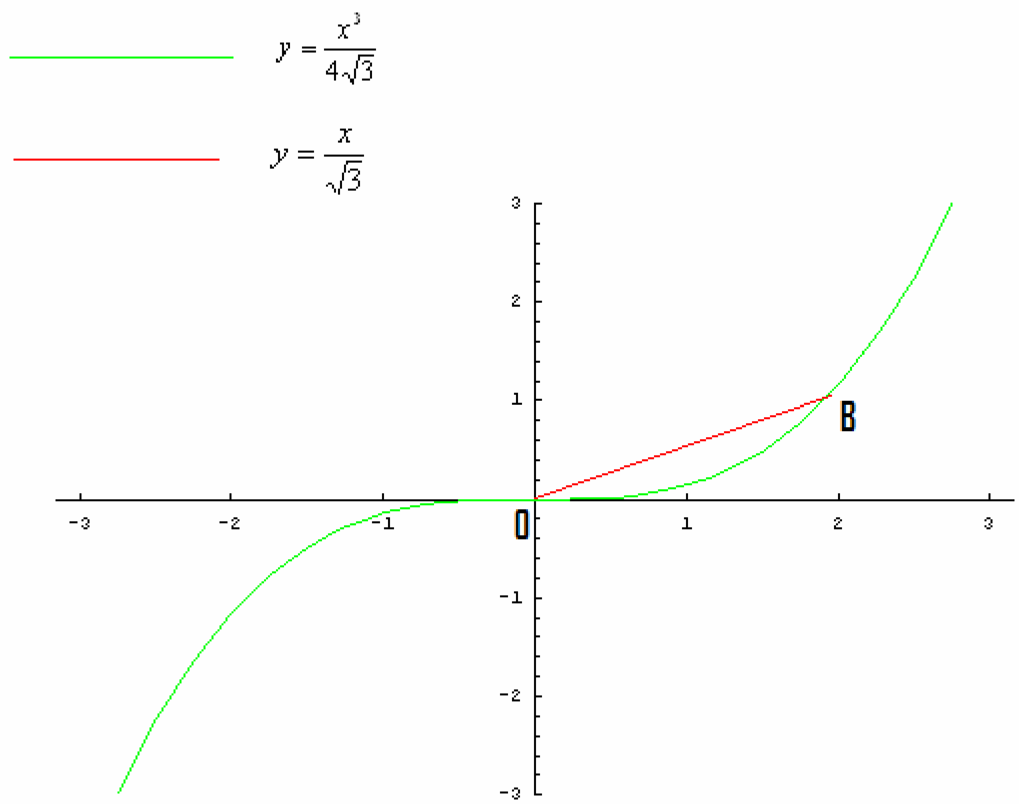
La presenza del flesso a tangente orizzontale in (0,0) comporta altre due condizioni:

$$f'(0) = \left(3ax^2 + 2bx + c\right)_{x=0} = c = 0$$
$$f''(0) = \left(6ax + 2b\right)_{x=0} = 2b = 0 \rightarrow b = 0$$

Quindi la cubica avrà equazione $y = ax^3 = \frac{x^3}{4\sqrt{3}}$

Questa funzione è definita i tutto R, incontra l'asse delle ascisse e delle ordinate nel suo flesso (0,0), è positiva in $(0,+\infty)$, è crescente in $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

Il suo grafico è il seguente:



4)

L'area richiesta è pertanto:

$$AREA = \int_0^2 \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{4\sqrt{3}} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2\sqrt{3}} - \frac{x^4}{16\sqrt{3}} \right]_0^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x)=e^{3x}+2e^{2x}-3e^{x}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si determinino le coordinate del punto A, in cui la curva C incontra la curva C' rappresentativa dell'equazione $y=e^{x}$.
3. Si scrivano l'equazione della tangente alla curva C nell'origine e l'equazione della tangente alla curva C' nel punto A.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse x e dalla retta di equazione x=log3.

Soluzione

1)

Studiamo la funzione $y=e^{3x}+2e^{2x}-3e^{x}=e^{x}\left(e^{2x}+2e^{x}-3\right)=e^{x}\left(e^{x}+3\right)\left(e^{x}-1\right)$

- Dominio: la funzione è definita in tutto R.
- Intersezione asse delle ascisse: $y=e^{x}\left(e^{x}+3\right)\left(e^{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(e^{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$;
- Intersezione asse delle ordinate: $x=0 \Rightarrow y=0$;
- Positività: $y=e^{x}\left(e^{x}+3\right)\left(e^{x}-1\right)>0 \Leftrightarrow \left(e^{x}-1\right)>0 \Leftrightarrow e^{x}>1 \Leftrightarrow x>0$;
- Asintoti verticali: visto il dominio non esistono asintoti verticali;
- Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to+\infty}\left[e^{x}\left(e^{x}+3\right)\left(e^{x}-1\right)\right]=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\left[e^{x}\left(e^{x}+3\right)\left(e^{x}-1\right)\right]=0$ per cui la retta $y=0$ è asintoto orizzontale;
- Asintoti obliqui: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[e^{x}\left(e^{x}+3\right)\left(e^{x}-1\right)\right]}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\left[e^{x}\left(e^{x}+3\right)\left(e^{x}-1\right)\right]}{x}=0$ per cui non esistono asintoti obliqui;
- Crescenza e decrescenza:

$$y'=3e^{3x}+4e^{2x}-3e^{x}=e^{x}\left(3e^{2x}+4e^{x}-3\right)=\frac{e^{x}}{3}\left(e^{x}+\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)\left(e^{x}+\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)>0 \Rightarrow$$

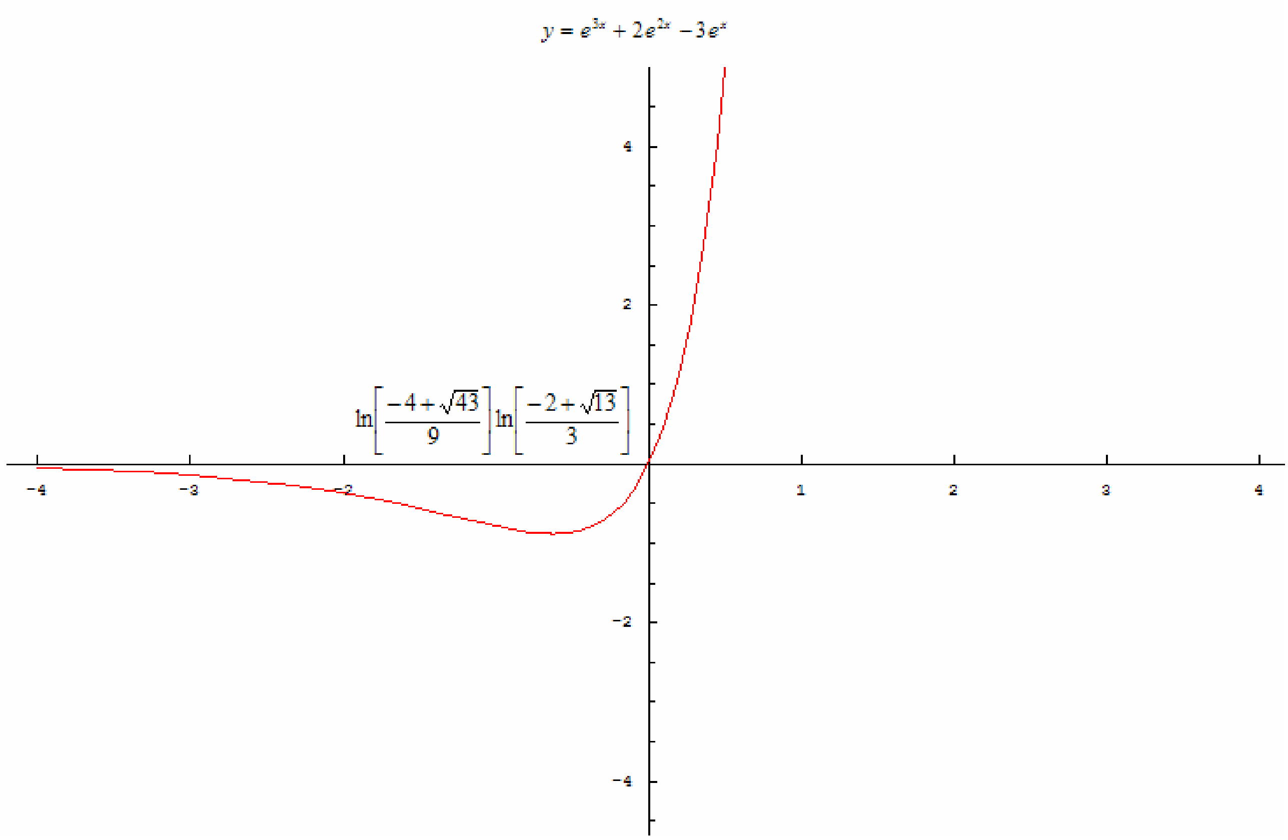
$$\left(e^{x}+\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)>0 \Rightarrow x>\ln\left[\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right]$$

$$y''=9e^{3x}+8e^{2x}-3e^{x}=e^{x}\left(9e^{2x}+8e^{x}-3\right)=0 \Leftrightarrow \left(9e^{2x}+8e^{x}-3\right)=0 \Rightarrow e^{x}=\frac{-4\pm\sqrt{43}}{9} \Rightarrow$$

$$x=\ln\left[\frac{-4+\sqrt{43}}{9}\right] \text{ è l'ascissa del flesso}$$

Inoltre $y''\left\{\ln\left[\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right]\right\}=\frac{2}{9}\left(13-2\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{13}-2\right)>0$ per cui $x=\ln\left[\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right]$ è l'ascissa del minimo relativo.

Il grafico è sotto presentato:



2)

Calcolo punto A:

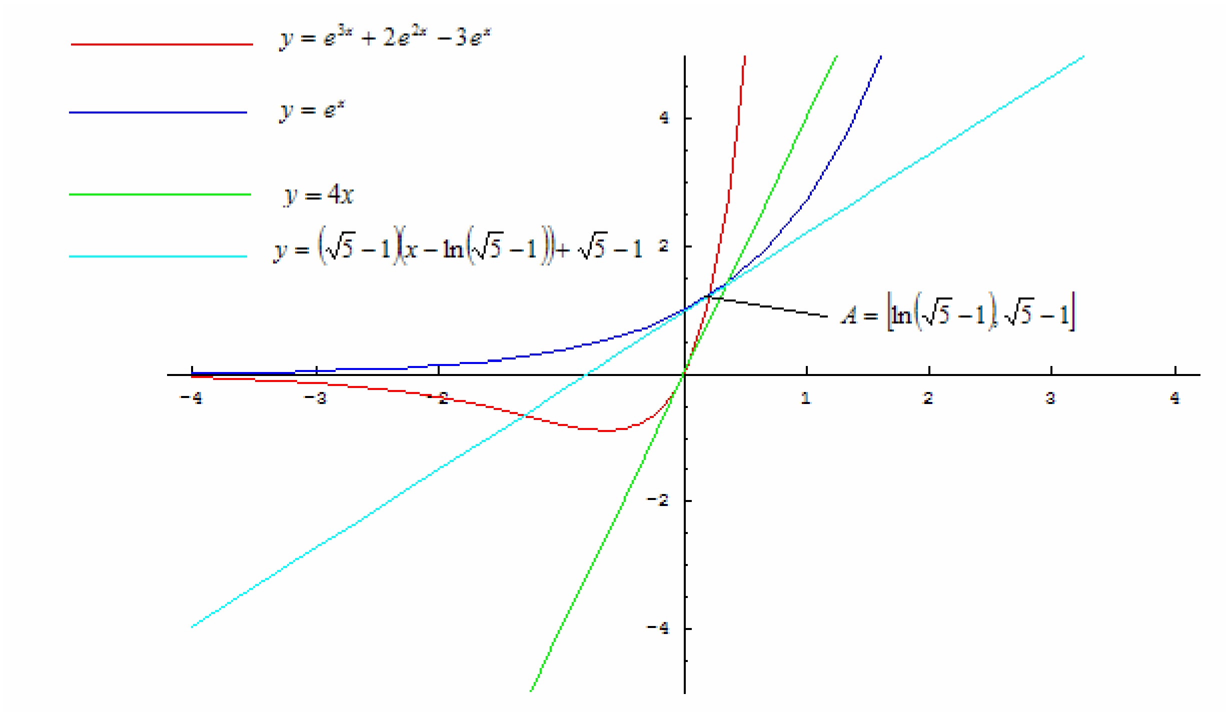
$$\begin{cases} y=e^{3x}+2e^{2x}-3e^{x} \\ y=e^{x} \end{cases} \Rightarrow e^{3x}+2e^{2x}-4e^{x}=e^{x}\left(e^{2x}+2e^{x}-4\right)=e^{x}\left(e^{x}+1-\sqrt{5}\right)\left(e^{x}+1+\sqrt{5}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{x}+1-\sqrt{5}\right)=0 \Rightarrow x=\ln\left(\sqrt{5}-1\right) \Rightarrow A=\left[\ln\left(\sqrt{5}-1\right),\sqrt{5}-1\right]$$

3)

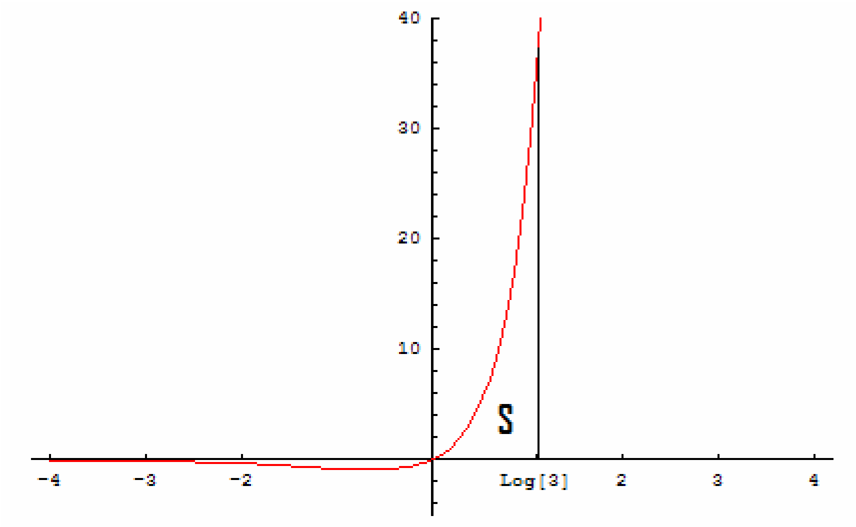
La tangente alla curva di equazione $y=e^{3x}+2e^{2x}-3e^{x}$ nell'origine (0,0) ha equazione $y=mx$ con $m=y'(0)=4$ per cui la tangente ha equazione $y=4x$.

La tangente alla curva di equazione $y=e^{x}$ in $A=\left[\ln\left(\sqrt{5}-1\right),\sqrt{5}-1\right]$ ha equazione equazione $y=m\left(x-\ln\left(\sqrt{5}-1\right)\right)+\sqrt{5}-1$ con $m=y'\left(\ln\left(\sqrt{5}-1\right)\right)=\sqrt{5}-1$ per cui la tangente ha equazione $y=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(x-\ln\left(\sqrt{5}-1\right)\right)+\sqrt{5}-1$.



4)

Si consideri la figura sottostante per il calcolo dell'area:



Il punto ad ascissa $x = \ln(3)$ ha ordinata pari a 36 e l'area richiesta è pari a:

$$S = \int_0^{\ln(3)} \left[e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^{x}\right] dx = \left[\frac{e^{3x}}{3} + e^{2x} - 3e^{x}\right]_0^{\ln(3)} =$$

$$= 9 + 9 - 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = \frac{32}{3}$$

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{x^2 \cos x}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$, quando x tende a 0.
2. Si determini il campo di esistenza della funzione y=arcsen(tgx), con $0 \le x \le 2\pi$.
3. Si calcoli il valore medio della funzione $y=\operatorname{tg}^2 x$, nell'intervallo $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$.
4. Si provi che per la funzione $f(x)= x^3-8$, nell'intervallo $0 \le x \le 2$, sono verificate le condizioni di validità del teorema di Lagrange e si trovi che il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.
5. Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.
6. Si consideri la seguente proposizione: "Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
7. Sia data la funzione:

   $$f(x)=\begin{cases} x \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{per } x=0 \end{cases}$$

   Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.
8. Si determini l'area della regione piana limitata nella curva di equazione $y=e^x$, dalla curva di equazione $y=x^3$ e dalle rette x=0 e x=1.
9. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x+2}$.
10. Si risolva la disequazione $\dbinom{x}{3} > \dfrac{15}{2}\dbinom{x}{2}$.

Soluzione

1)

Bisogna calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)}{x^2-\sin^2(x)}$$

Esso può essere scritto nel modo seguente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)}{x^2-\sin^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)}{x^2\left(1-\frac{\sin^2(x)}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{\left(1-\frac{\sin^2(x)}{x^2}\right)}$$

Ora distinguiamo i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)}{\left(1-\frac{\sin^2(x)}{x^2}\right)}=\frac{1}{0^+}=+\infty,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(x)}{\left(1-\frac{\sin^2(x)}{x^2}\right)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

per cui il limite $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)}{x^2-\sin^2(x)}$ e vale $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)}{x^2-\sin^2(x)}=+\infty$.

Un altro modo per calcolarlo è sfruttare gli sviluppi di Taylor:

$$\cos(x)\cong 1-\frac{x^2}{2}+o(x^4)$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^5)$$

per cui sostituendo e tralasciando gli o-piccolo si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)}{x^2-\sin^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)}{(x-\sin(x))(x+\sin(x))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{\left(x+x-\frac{x^3}{6}\right)\left(x-x+\frac{x^3}{6}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{\left(2x-\frac{x^3}{6}\right)\left(\frac{x^3}{6})\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{\left(2-\frac{x^2}{6}\right)\left(\frac{x^2}{6}\right)}$$

Ora distinguiamo i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{\left(2-\frac{x^2}{6}\right)\left(\frac{x^2}{6}\right)}=\frac{1}{0^+}=+\infty,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{\left(2-\frac{x^2}{6}\right)\left(\frac{x^2}{6}\right)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Per cui anche in tal caso abbiamo ottenuto il risultato precedente.

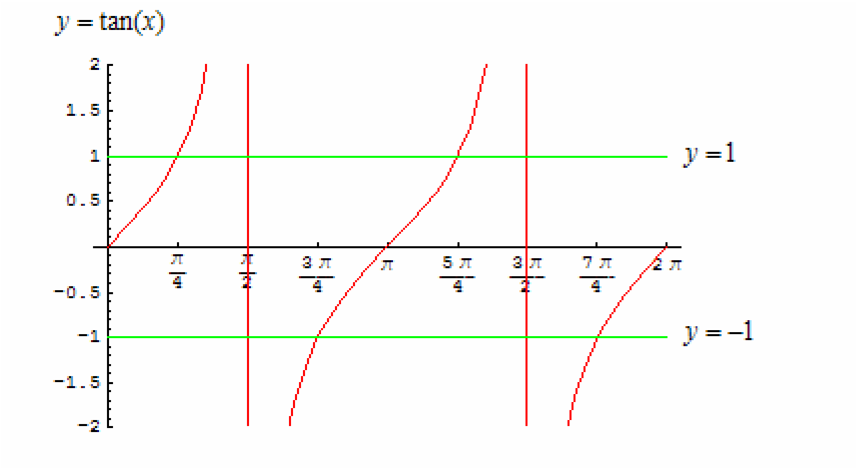
Un ulteriore via è quella di applicare De l'Hospital, che lasciamo al lettore.

2)

La funzione $y=\arcsin(\tan(x))$ ha come dominio $|\tan(x)|\le 1 \Leftrightarrow -1\le \tan(x)\le 1$. Consideriamo ora il seguente sistema che risolve la disequazione suddetta:

$$\begin{cases} y=\tan(x) \\ -1\le y\le 1 \\ 0\le x\le 2\pi \end{cases}$$

Si consideri la figura seguente:



La disequazione è soddisfatta allora nell'intervallo $[0,2\pi]$ nei seguenti intervalli:

$$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$$

3)

Il valore medio di una funzione $y = f(x)$ in un intervallo $[a,b]$ è per definizione

$$V_M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Nel nostro caso si ha:

$$V_M = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\right]dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos^2(x)}-1\right]dx =$$
$$\frac{4}{\pi}\left[\tan(x)-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}\left[1-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{4-\pi}{\pi}$$

4)

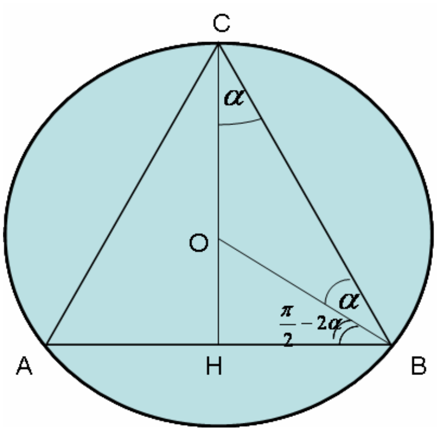
La funzione $y = x^3 - 8, 0 \le x \le 2$ è continua e derivabile in tutto R ed in particolare nell'intervallo [0,2] per cui ad essa è applicabile il teorema di Lagrange, cioè

$$\exists c \in (0,2):\ f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$$

Ora $f(0) = -8, f(2) = 0, f'(c) = 3c^2$ per cui si deve risolvere l'equazione $3c^2 = 4 \Rightarrow c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ di cui solo $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ è accettabile perché interno all'intervallo [0,2].

5)

La dimostrazione la effettuiamo per via trigonometrica
Si consideri la figura seguente che rappresenta la geometria del problema.:



Ora:

$$CH = CO + OH = r + OH$$
$$OH = OB\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = r\cos(2\alpha)$$
$$CH = r[1 + \cos(2\alpha)]$$
$$HB = r\sin(2\alpha)$$
$$f(\alpha) = CH + 2AB = CH + 4HB = r[1 + \cos(2\alpha)] + 4r\sin(2\alpha) = r[1 + \cos(2\alpha) + 4\sin(2\alpha)]$$

Ora i limiti geometrici impongono $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Per calcolare il massimo della funzione calcoliamo le derivate, prima e seconda:

$$f'(\alpha) = r[-2\sin(2\alpha) + 8\cos(2\alpha)] = 2r\cos(2\alpha)[4 - \tan(2\alpha)]$$

Ora in $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ si ha $2r\cos(2\alpha) \geq 0$ per cui $f'(\alpha) = 2r\cos(2\alpha)[4 - \tan(2\alpha)] \geq 0 \Rightarrow \tan(2\alpha) \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{\arctan(4)}{2}$.

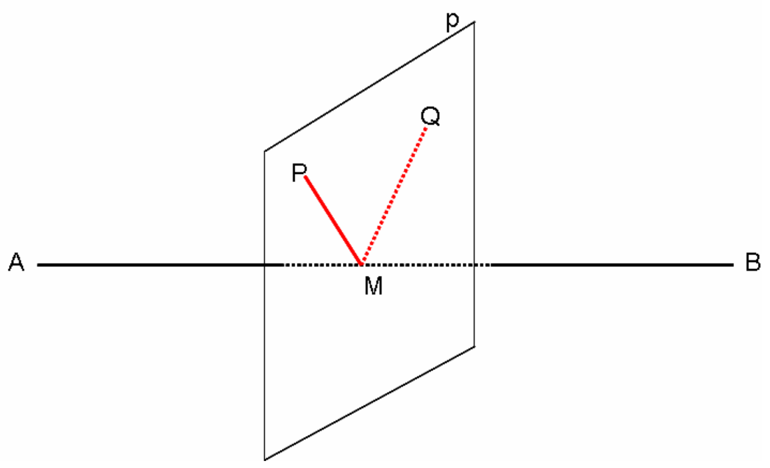
Inoltre

$$f''(\alpha) = r[-4\cos(2\alpha) - 16\sin(2\alpha)] = -4r\cos(2\alpha)(1 + 4\tan(2\alpha))$$
$$f''\left(\frac{\arctan(4)}{2}\right) = \left[-4r\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2(2\alpha)}}(1 + 4\tan(2\alpha))\right]_{\tan(2\alpha)=4} = -4r\sqrt{17} < 0$$

per cui il valore che massimizza la somma dell'altezza e del doppio della base è $\alpha = \frac{\arctan(4)}{2} \cong 38°$.

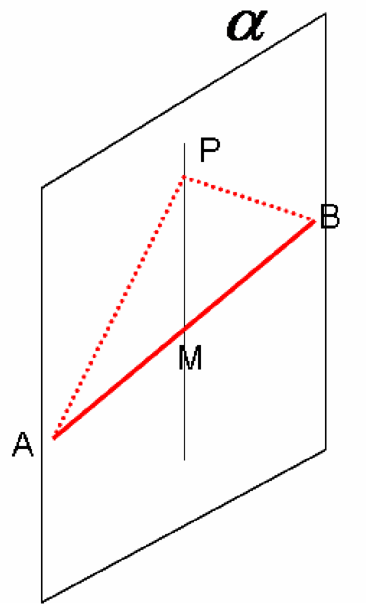
6)

Consideriamo la figura sottostante:



La risposta presentata dalla traccia è falsa dal momento che l'insieme dei punti nello spazio equidistanti da A e B, distinti, è il piano perpendicolare, nel punto medio M del segmento AB, al segmento stesso AB. Infatti dalla figura soprastante si evince che se P è un punto di tale piano, essendo PA e PB le ipotenuse dei due triangoli rettangoli PMA e PMB, ed essendo MA=MB, si ha PA=PB. Ora bisogna mostrare che i punti di tale piano p sono gli unici. Cioè supponiamo per assurdo che esista un punto Q appartenente ad un piano p' differente da p e tale che QA=QB. Allora il triangolo QAB sarà isoscele su AB e QM sarà perpendicolare in M alla retta AB; ma in tal modo esisterebbero due piani perpendicolari ad una retta nello stesso punto, cosa questa impossibile. Per cui esiste uno ed un solo piano i cui punti sono equidistanti da due punti distinti.

Un ulteriore modo per dimostrare quanto detto, in maniera meno analitica e più intuitive, è ricordare che in un piano α contenente due punti distinti A e B il luogo dei punti equidistanti da A e B è l'asse del segmento. Ora se si fa ruotare questo piano α contenente A e B in modo da considerare gli infiniti piani passanti per A e B, l'asse del segmento descriverà l'intero piano α. Per cui per ogni punto P del piano α vale PA=PB come evidenziato dalla figura sottostante.



7)

Dobbiamo discutere la continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

nel punto $x = 0$.
Innanzitutto vediamo la continuità:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty}\left[\frac{\arctan(y)}{y}\right] = 0*\arctan(+\infty) = 0*\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to-\infty}\left[\frac{\arctan(y)}{y}\right] = 0*\arctan(-\infty) = 0*\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Quindi la funzione è continua in $x=0$.

Vediamo ora la derivabilità calcolando la derivata prima per $x\neq 0$:

$$y' = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + x\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1}$$

Ora

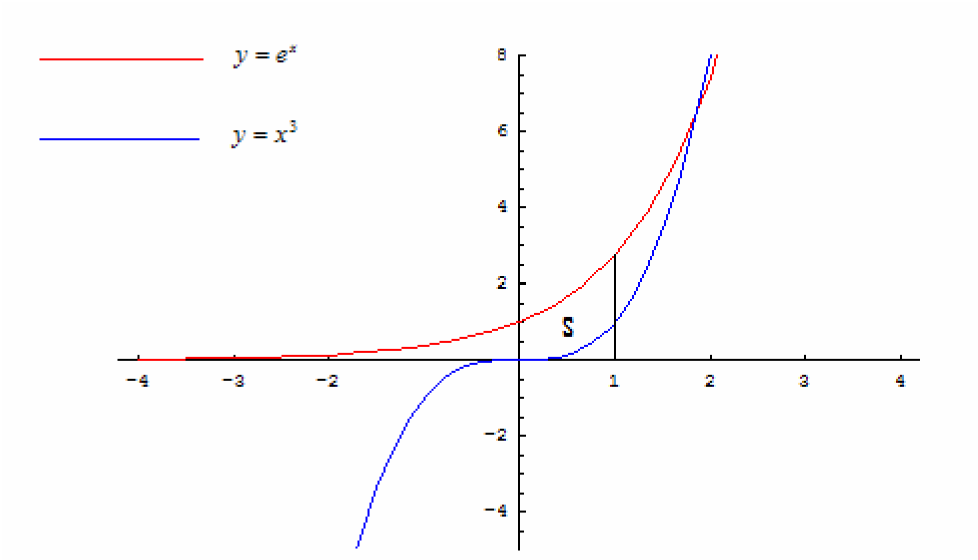
$$\lim_{x\to 0^+}\left[\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1}\right] = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1}\right] = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Quindi $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste per cui la funzione è continua ma non è derivabile in $x=0$; in particolare in $x=0$ presenta un punto angoloso.

8)

Si consideri la figura seguente:



L'area da calcolare è

$$S=\int_0^1\left(e^x-x^3\right)dx=\left[e^x-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=e-\frac{1}{4}-1=e-\frac{5}{4}$$

9)

La funzione $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x+2}$ ha come dominio $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$. Vediamo gli asintoti:

- Asintoti verticali: $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{2x^2+3}{x+2}=\dfrac{11}{0^+}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{2x^2+3}{x+2}=\dfrac{11}{0^-}=-\infty$, per cui $x=-2$ è asintoto verticale destro e sinistro;
- Asintoti orizzontali: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3}{x+2}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+3}{x+2}=-\infty$ per cui non esistono asintoti orizzontali;
- Asintoti obliqui: hanno equazione generica $y=mx+q$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2+3}{x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+2x}=2,\ m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^2+3}{x+2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+2x}=2$$
$$q=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2+3}{x+2}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+3}{x+2}=-4,\ q=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x^2+3}{x+2}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+3}{x+2}=-4$$

per cui la retta $y=2x-4$ è asintoto obliqui destro e sinistro.

10)

La disequazione ha senso innanzitutto se (x) è un intero positivo e poi se $\begin{cases}x\ge 3\\ x\ge 2\end{cases}\to x\ge 3$ condizioni queste imposte dalla definizione di coefficiente binomiale.

Ora

$$\binom{x}{3}>\frac{15}{2}\binom{x}{2}\Leftrightarrow\frac{x!}{3!(x-3)!}>\frac{15}{2}\frac{x!}{2!(x-2)!}\Leftrightarrow$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)}{6}>\frac{15}{2}\frac{x(x-1)}{2}\Leftrightarrow$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)}{6}-\frac{15x(x-1)}{4}>0\Leftrightarrow$$
$$\frac{x(x-1)}{24}[4x-8-90]=\frac{x(x-1)(2x-49)}{12}>0$$

Bisogna risolvere allora il sistema seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{x(x-1)(2x-49)}{12} > 0 \\ x \geq 3 \\ x \text{ intero positivo} \end{cases}$$

La disequazione $\dfrac{x(x-1)(2x-49)}{12} > 0$ la risolviamo, ponendo tutti i fattori $(x, x-1, 2x-49)$ entrambi maggiori od uguali a zero e poi verificheremo dove è soddisfatto il segno della disequazione stessa. In questo modo $\dfrac{x(x-1)(2x-49)}{12} > 0$ è verificata per $0 < x < 1, x > \dfrac{49}{2}$, per cui il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} 0 < x < 1, x > \dfrac{49}{2} \\ x \geq 3 \\ x \text{ intero positivo} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{49}{2} \\ x \text{ intero positivo} \end{cases}$$

per cui a partire dai numeri interi positivi maggiori od uguali a 25 la disequazione è sempre soddisfatta.