Sessione ordinaria 2007

Seconda prova scritta

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

PROBLEMA 2

Si consideri un cerchio C di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $S_n = \dfrac{n}{2} r^2 sen \dfrac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

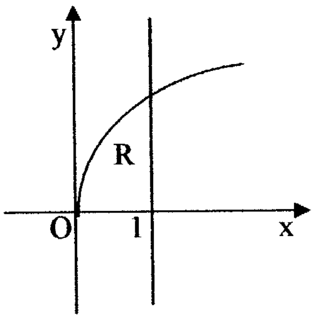
M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta x = 1 (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
3. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0$$
4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.
5. Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del *teorema del valor medio* (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo [-2, 2]. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.
6. Si sa che il prezzo *p* di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?
7. Se *f(x)* è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo [-2, 2], che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?
   Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione 3+ $f(x)$?
8. Si risolva l'equazione: $4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}$
9. Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera *S* e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta *r* passante per il centro di *S*, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

___

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

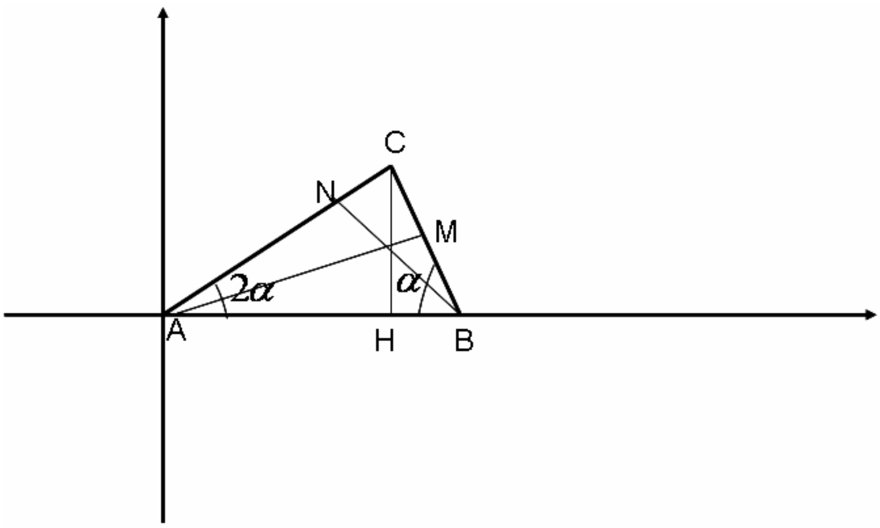
PROBLEMA 1

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

SOLUZIONE

Consideriamo la seguente figura:



1)
Il punto C ha coordinate generiche $C = (x, y)$. Ma il triangolo AHC è rettangolo per cui $y = x\tan(2\alpha)$.

Ora applicando il teorema dei seni al triangolo ABC si ha:

$$\frac{AC}{\sin(\alpha)} = \frac{AB}{\sin(\pi - 3\alpha)} = \frac{1}{\sin(3\alpha)} \rightarrow$$

$$AC = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(3\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha + \alpha)} =$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \cos(2\alpha)\sin(\alpha)} =$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)\left[2\cos^2(\alpha) + \cos(2\alpha)\right]} = \frac{1}{\left[4\cos^2(\alpha) - 1\right]} = \frac{1}{\left[2\cos(2\alpha) + 1\right]}$$

Ma vale anche che:

$$AH = x = AC\cos(2\alpha) = \frac{\cos(2\alpha)}{[2\cos(2\alpha)+1]} \rightarrow \cos(2\alpha) = \frac{x}{1-2x}$$

Quindi abbiamo due condizioni:

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \dfrac{x}{1-2x} \\ \sin(2\alpha) = \dfrac{y}{x}\cos(2\alpha) = \dfrac{y}{1-2x} \end{cases}$$

Ricordando la relazione fondamentale

$$\begin{aligned} &\sin^2(2\alpha)+\cos^2(2\alpha)=1 \rightarrow \\ &\left(\frac{y}{1-2x}\right)^2+\left(\frac{x}{1-2x}\right)^2=1 \rightarrow \\ &x^2+y^2-(1-2x)^2=0 \rightarrow \\ &y^2-3x^2+4x-1=0 \end{aligned}$$

Per cui si ha:

$$\gamma : y^2-3x^2+4x-1=0$$

Per capire di che curva si tratta riscriviamola in questo modo:

$$\begin{aligned} &y^2-3x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow y^2-\left(3x^2-4x+1\right)=0 \Leftrightarrow y^2-3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \\ &y^2-3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow y^2-3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow \\ &\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1 \end{aligned}$$

Ora se effettuiamo una traslazione lungo l'asse delle ascisse cioè effettuiamo la trasformazione $x'' = x-\frac{2}{3}$ la curva diventa:

$$\gamma : \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1 \rightarrow \gamma'' : \frac{(x'')^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$$

cioè otteniamo la classica iperbole con asintoti $y = \pm x\sqrt{3}$. Per cui la nostra curva è una iperbole traslata con asintoti $y = \pm\sqrt{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)$

2)

Il problema impone però delle limitazioni geometriche.

Innanzitutto deve essere $0° \le \alpha \le 60°$. Ora poiché il coseno in questo intervallo è decrescente allora

$$0° \le \alpha \le 60° \Leftrightarrow 0 \le 2\alpha \le 120° \rightarrow \cos(120°) \le \cos(2\alpha) \le \cos(0°) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \cos(2\alpha) \le 1$$

Ma

$$\cos(2\alpha) = \frac{x}{1-2x} \rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{x}{1-2x} \le 1 \rightarrow$$
$$\begin{cases} \frac{x}{1-2x} \le 1 \\ \frac{x}{1-2x} \ge -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-1}{1-2x} \le 0 \\ \frac{1}{1-2x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{3}, x > \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$x \le \frac{1}{3}$$

Inoltre per come introdotto il sistema di riferimento deve aversi $y \ge 0$, quindi il nostro problema va discusso per

$$\begin{cases} x \le \frac{1}{3} \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Ricaviamo ora la funzione $y = f(x)$ dalla curva $\gamma : y^2 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

Si ha:

$$y = \pm\sqrt{3x^2 - 4x + 1}$$

Ma con la limitazione $y \ge 0$ la soluzione da prendere è quella positiva per cui la nostra funzione è

$$y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$$

Studiamo allora la funzione $y=\sqrt{3x^2-4x+1}$ con la limitazione $x\le\frac{1}{3}$

Dominio: $3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)\ge 0\to x\ge 1\cup x\le\frac{1}{3}$ che con la limitazione $x\le\frac{1}{3}$ impone come dominio $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$;

Intersezioni asse ascisse: $y=\sqrt{3x^2-4x+1}=0\to 3x^2-4x+1=0\to x=1, x=\frac{1}{3}$ e con la limitazione l'unica intersezione è $x=\frac{1}{3}$;

Intersezioni asse delle ordinate: $x=0\to y=1$**;**

Positività: nel dominio la funzione è sempre positiva visto che si tratta di una funzione radice;

Asintoti verticali: non ce ne sono;

Asintoti orizzontali: non ce ne sono. Infatti $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-4x+1}=+\infty$;

Asintoti obliqui:

$$y=mx+q$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-4x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\sqrt{3}$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{3x^2-4x+1}+x\sqrt{3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4x+1}{\sqrt{3x^2-4x+1}-x\sqrt{3}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4x+1}{-x\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{3}}\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

per cui l'asintoto è unico ed è pari a $y=-\sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}}$ come già anticipato. L'altro asintoto non lo abbiamo calcolato e ritrovato perché abbiamo la limitazione $x\le\frac{1}{3}$

Crescenza e decrescenza:.

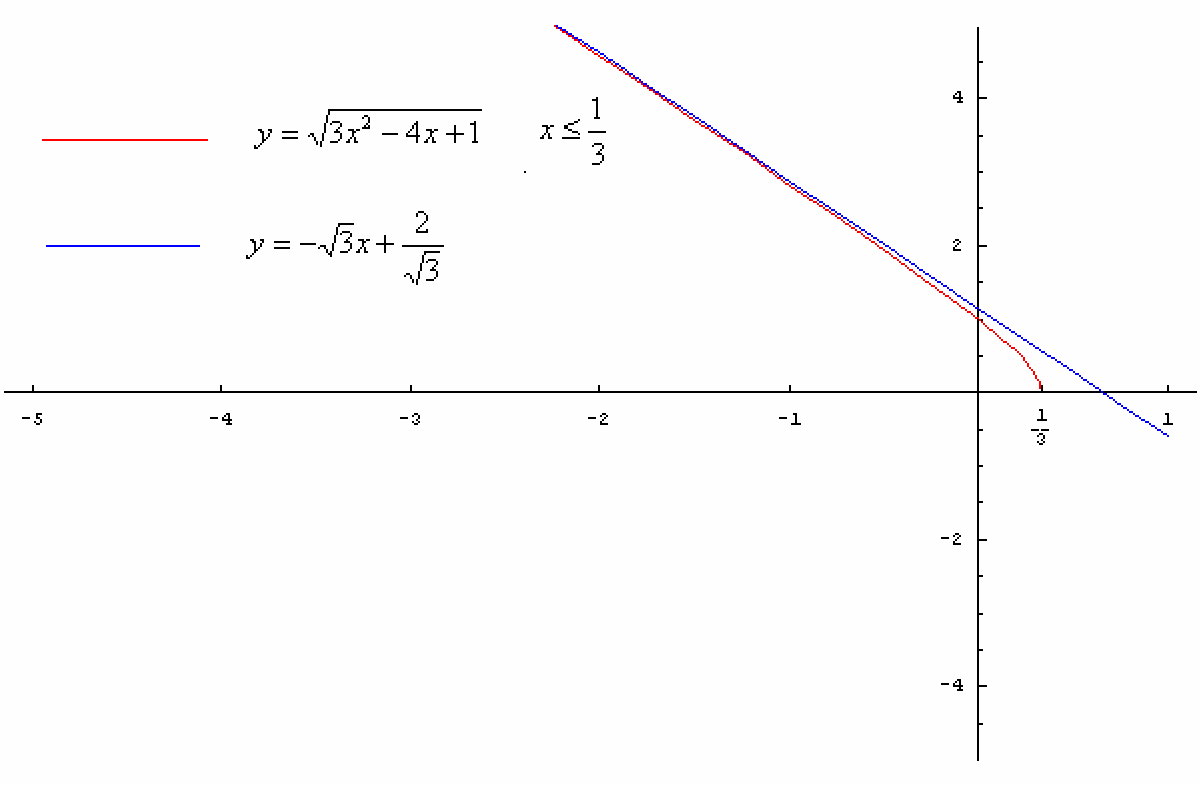
Calcoliamo le derivate:

$y'(x) = \dfrac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}} > 0 \to x \in (1,+\infty)$ tenendo conto del dominio di definizione.

Per cui la funzione è crescente nell' intervallo $x \in (1,+\infty)$ e decrescente altrove. Poiché abbiamo la limitazione geometrica $x \le \dfrac{1}{3}$ allora la nostra funzione è sempre decrescente.

Inoltre essa non è derivabile in $x = \dfrac{1}{3}$ perché $\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} y'(x) = \lim_{x \to \frac{1}{3}^+} y'(x) = -\infty$.

Il grafico è sotto presentato:



In realtà va fatta una ulteriore considerazione. Se scegliamo il sistema di riferimento in modo da avere il triangolo col vertice che spazia nel terzo e quarto quadrante otteniamo l'altra soluzione, precedentemente scartata. Cioè otteniamo che il luogo in quel caso è descritto dall'equazione

$$y = -\sqrt{3x^2-4x+1}$$

che è la simmetrica di $y=\sqrt{3x^2-4x+1}$ rispetto all'asse delle ascisse. In tal caso è importante controllare che l'asintoto verticale abbia equazione $y=\sqrt{3}x-\frac{2}{\sqrt{3}}$ come dedotto dall'equazione dell'iperbole.

Ed infatti

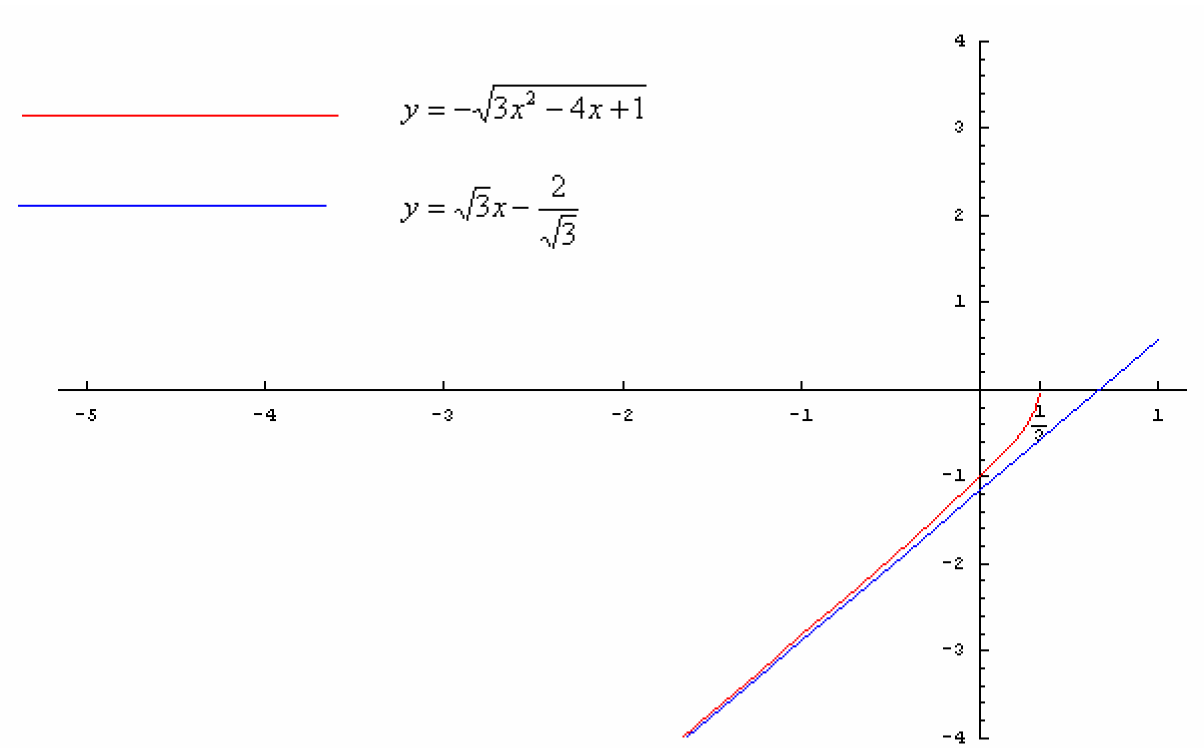
$$y=mx+q$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{3x^2-4x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-|x|\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\sqrt{3}$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\left[-\sqrt{3x^2-4x+1}-x\sqrt{3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4x+1}{-\sqrt{3x^2-4x+1}+x\sqrt{3}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4x+1}{x\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{3}}\right]=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

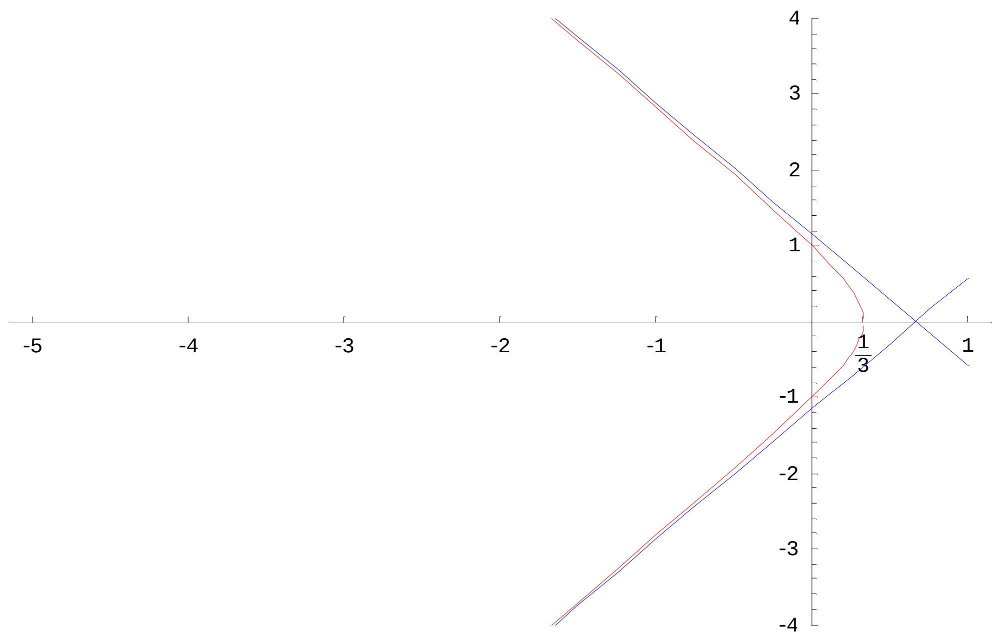
per cui l'asintoto è unico ed è pari a $y=\sqrt{3}x-\frac{2}{\sqrt{3}}$ come già anticipato.

In conclusione in tal caso il grafico è:



Se mettiamo assieme i due grafici otteniamo il ramo di iperbole ottenuto dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \\ x \le \dfrac{1}{3} \end{cases}$$



come sin dall'inizio evidenziato.

Abbiamo preferito fare tutti i calcoli perché era l'unica strada da perseguire se non ci si accorgeva che con una semplice traslazione ottenevamo una iperbole. E' stato un modo per confermare i risultati da un altro punto di vista.

3)

Considerando la figura di partenza si ha:

$AM = AB\sin(\alpha) = \sin(\alpha)$

$BN = AB\sin(2\alpha) = \sin(2\alpha)$

Per cui la funzione da massimizzare è $S(\alpha) = \sin^2(\alpha) + \sin^2(2\alpha)$.

Calcoliamo le derivate:

$$S'(\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 4\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) = \sin(2\alpha)[1 + 4\cos(2\alpha)]$$
$$S''(\alpha) = 2\cos(2\alpha) + 8\cos(4\alpha)$$

Il segno lo si discute sempre discutendo singolarmente ogni fattore, ricordando la limitazione $0° \le \alpha \le 60°$:

$$\sin(2\alpha) > 0 \rightarrow k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$\cos(2\alpha) > -\frac{1}{4} \rightarrow k\pi < \alpha < \frac{1}{2} ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \cup \left(\pi - \frac{1}{2} ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) + k\pi < x < \pi + k\pi$$

e limitandoci in $0° \le \alpha \le 60°$ si ha:

$$S'(\alpha) > 0 \rightarrow 0 < \alpha < \frac{1}{2} ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$S''\left(\frac{1}{2} ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) < 0$$

per cui il valore che massimizza la funzione $S(\alpha) = \sin^2(\alpha) + \sin^2(2\alpha)$ è

$$\alpha = \frac{1}{2} ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right) \cong 52°13'$$

4)

Per dimostrare l'ultima questione ci serviamo di relazioni trigonometriche fondamentali:

$$\sin(72°) = 2\sin(36°)\cos(36°)$$
$$\sin(36°) = 2\sin(18°)\cos(18°)$$
$$\cos(36°) = 1 - 2\sin^2(18°)$$
$$\sin(72°) = \sin(90° - 18°) = \cos(18°)$$

Da queste ricaviamo:

$$4\sin(18°)\cos(18°)[1 - 2\sin^2(18°)] = \cos(18°) \rightarrow 4\sin(18°)[1 - 2\sin^2(18°)] = 1$$

Poniamo ora $x=\sin(18°)$, allora:

$$4\sin(18°)\left[1-2\sin^2(18°)\right]=1 \to 4x(1-2x^2)=1 \to 8x^3-4x+1=0 \to$$
$$(2x-1)\left(4x^2+2x-1\right)=0 \to x=\frac{1}{2}, x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

Ora la soluzione $x=\frac{1}{2}$ non è accettabile perché a 30° il seno vale $\frac{1}{2}$. Inoltre la soluzione $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ va scartata perché riguarda un angolo che non si trova nel primo quadrante, in cui si trova invece 18°. Per cui in conclusione si ha

$$\sin(18°)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Ora

$$AC=\frac{1}{\left[4\cos^2(36°)-1\right]}=\frac{1}{\left[4\cos^2(2*18°)-1\right]}=\frac{1}{\left[4\left(\cos^2(18°)-\sin^2(18°)\right)^2-1\right]}=$$
$$\frac{1}{\left[4\left(1-2\sin^2(18°)\right)^2-1\right]}=\frac{1}{\left[4\left(1-2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right)^2-1\right]}=\frac{1}{\left[4\left(1-\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{8}\right)\right)^2-1\right]}=$$
$$\frac{1}{\left[4\left(\frac{2+2\sqrt{5}}{8}\right)^2-1\right]}=\frac{1}{\left[\left(\frac{24+8\sqrt{5}}{16}\right)-1\right]}=\frac{16}{8+8\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

PROBLEMA 2

Si consideri un cerchio C di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $S_n = \frac{n}{2} r^2 sen\,\frac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

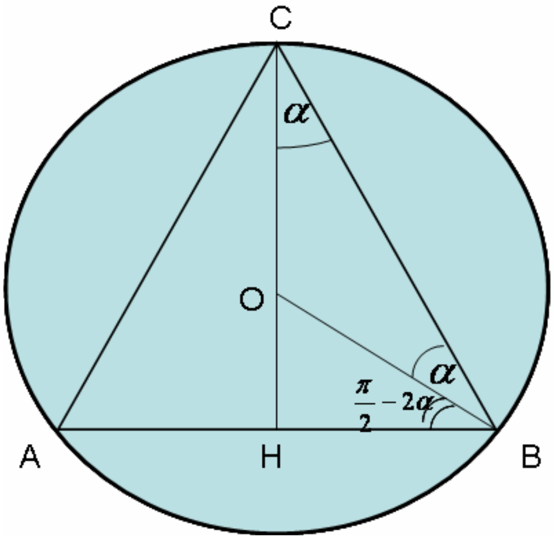
SOLUZIONE

1)

La dimostrazione può essere effettuate sia per via trigonometrica che per via geometrica sfruttando nozioni di geometria euclidea. Illustriamo ambo le strade perseguite.

- Utilizzo trigonometria.

Si consideri la figura seguente che rappresenta la geometria del problema.:



Ora:

$$CH = CO + OH = r + OH$$

$$OH = OB \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = r\cos(2\alpha)$$

$$CH = r[1 + \cos(2\alpha)]$$

$$AB = 2HB = 2OB\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = 2r\sin(2\alpha)$$

Quindi l’area del triangolo sarà:

$$A = \frac{CH * AB}{2} = f(\alpha) = r^2 \sin(2\alpha)[1 + \cos(2\alpha)]$$

Ovviamente la limitazione geometrica imposta dal problema è $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ora nell’intervallo $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione $f(\alpha) = r^2 \sin(2\alpha)[1 + \cos(2\alpha)]$ è continua, derivabile, sempre positiva ed assume valore nullo agli estremi. Per il teorema di Weierstrass tale funzione presenta un massimo assoluto, non assunto agli estremi, ma in un punto interno all’intervallo $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Tale punto lo ricercheremo attraverso le derivate:

$$f'(\alpha) = r^2\left[2\cos(2\alpha) + 2\cos^2(2\alpha) - 2\sin^2(2\alpha)\right] = 2r^2\left[2\cos^2(2\alpha) + \cos(2\alpha) - 1\right] =$$
$$2r^2[2\cos(2\alpha) - 1][\cos(2\alpha) + 1]$$

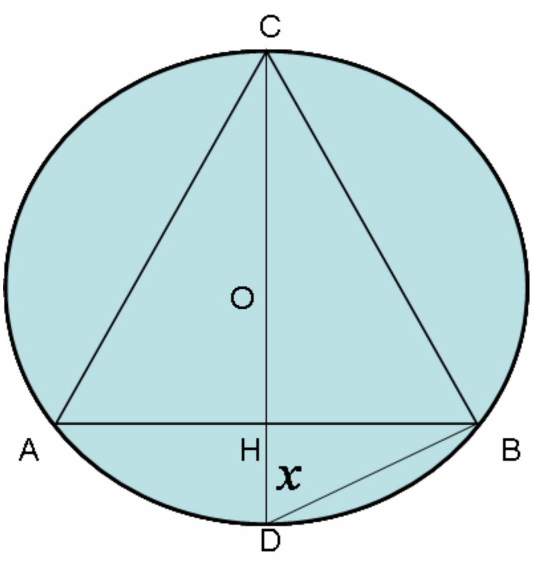
Ora nell’intervallo $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow 2\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\cos(2\alpha) + 1 > 0$, per cui

$$f'(\alpha) = 2r^2[2\cos(2\alpha) - 1][\cos(2\alpha) + 1] = 0 \rightarrow \cos(2\alpha) = \frac{1}{2} \rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{3} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Quindi il massimo assoluto è assunto per $\alpha = \frac{\pi}{6}$ cioè quando effettivamente il triangolo è equilatero.

- Utilizzo geometria euclidea.

Si consideri la figura seguente che rappresenta la geometria del problema.:



Sia $HD = x$ con la limitazione $0 \le x \le 2r$

Si ha:

$$AH = 2r - x$$
$$AB = 2HB = 2\sqrt{AH * HD} = 2\sqrt{x(2r-x)}$$

Per cui l'area sarà:

$$A = \frac{CH * AB}{2} = f(x) = (2r-x)\sqrt{x(2r-x)}$$

Calcoliamo ora le derivate:

$$f'(x) = -\sqrt{x(2r-x)} + (2r-x)\left(\frac{-x+r}{\sqrt{x(2r-x)}}\right) = \frac{-x(2r-x)+(2r-x)(r-x)}{\sqrt{x(2r-x)}} = \frac{(2r-x)(r-2x)}{\sqrt{x(2r-x)}}$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow 0 < x < \frac{r}{2}$$

che con la limitazione $0 \le x \le 2r$ comporta $0 \le x < \frac{r}{2}$. Inoltre $f''\left(\frac{r}{2}\right) < 0$ per cui il massimo dell'area è raggiunto per $x = \frac{r}{2}$.

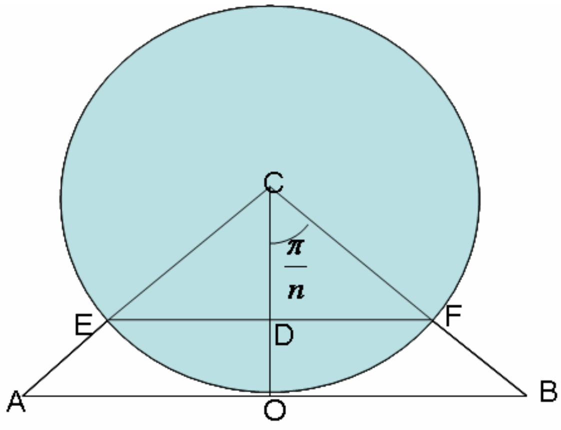
Ora

$$x = \frac{r}{2} \rightarrow AB = 2\sqrt{\frac{r}{2}\frac{3r}{2}} = r\sqrt{3}, CB = AC = \sqrt{HB^2 + CH^2} = \sqrt{\frac{3r^2}{4} + \frac{9r^2}{4}} = r\sqrt{3} = AB$$

ed ecco allora dimostrato per via geometrica che l'area massima la si ha in corrispondenza di un triangolo equilatero.

2)

Si consideri la figura seguente:



I lati del poligono di n lati inscritto nel cerchio possono essere considerati le basi di n triangolini isosceli che hanno un vertice coincidente col centro della circonferenza. Consideriamone uno, ad esempio CEF in figura. L'angolo al vertice sarà ovviamente $E\hat{C}F = \frac{2\pi}{n} \to D\hat{C}F = D\hat{C}E = \frac{\pi}{n}$.
Quindi l'area del poligono inscritto sarà:

$$S_{n,inscritto} = nS_{CEF}$$

E ricordando la nota formula trigonometrica per cui l'area di un triangolo è pari al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso, si ha

$$S_{CEF} = \frac{r^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \to S_{n,inscritto} = nS_{CEF} = \frac{nr^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Analoghe considerazioni si fanno per il poligono circoscritto: si avrà:

$$S_{n,circoscritto} = nS_{CAB}$$

Ora

$$AB = 2OB = 2CO\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2r\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \to S_{CAB} = \frac{2r^2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} = r^2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Da cui

$$S_{n,circoscritto} = nS_{CAB} = nr^2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

3)

Quello che ci si aspetta è che al crescere del numero di lati sia il poligono inscritto che quello circoscritto tendono ad approssimare perfettamente il cerchio ed al limite per $n \to \infty$ a confondersi con esso. Cioè ci aspettiamo che

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,inscritto} = \lim_{n\to\infty} S_{n,circoscritto} = \pi r^2$$

Infatti

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,inscritto} = \lim_{n\to\infty}\frac{nr^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \pi r^2 \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$\pi r^2 \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} \overset{t=\frac{1}{n}}{=} \pi r^2 \lim_{t\to 0}\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t} = \pi r^2 * 1 = \pi r^2$$

Analogamente

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,circoscritto} = \lim_{n\to\infty} nr^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

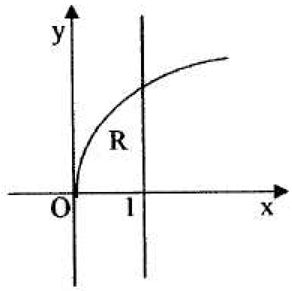
$$\pi r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} * \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \overset{t=\frac{1}{n}}{=} \pi r^2 \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \pi r^2 * 1 = \pi r^2$$

4)

Il problema della quadrature del cerchio consiste nel trovare con riga e compasso solamente un quadrato avente la stessa area di un dato cerchio. Questo equivale a costruire un quadrato di lato $l = \sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}$. Ma questo non è possibile visto che, come ha dimostrato Lindermann nel 1882, il numero π (e quindi la sua radice) è un numero trascendente.

QUESTIONARIO

1. La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta x = 1 (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



Soluzione

L'area di un triangolo equilatero è $A = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Nel nostro caso il lato $l = 2\sqrt{x}$ per cui l'area suddetta è $A = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = x\sqrt{3}$, per cui il volume richiesto è:

$$V = \int_0^1 x\sqrt{3}dx = \left[\frac{x^2\sqrt{3}}{2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

Soluzione

Si possono seguire differenti strade: o il teorema dei seni ed il teorema di Carnot oppure solo il teorema di Carnot applicato tre volte una per ogni angolo.

- Teorema dei seni e teorema di Carnet

Siano $a = 80, b = 60, c = 40$ i lati ed α, β, γ gli angoli opposti. Per il teorema dei seni si ha:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

mentre per il teorema di Carnot applicato al lato a si ha

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \to 6400 = 3600 + 1600 - 4800\cos(\alpha) \to \cos(\alpha) = -\frac{1}{4} \to \alpha \cong 104°29'$$

$$\sin(\beta) = \frac{3}{4}\sin(\alpha) \to \beta = \arcsin\left(\frac{3}{4}\sin(\alpha)\right) = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{15}}{16}\right) = 46°34'$$

$$\sin(\gamma) = \frac{1}{2}\sin(\alpha) \to \beta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sin(\alpha)\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right) = 28°57'$$

- Solo teorema di Carnot

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \to 6400 = 3600 + 1600 - 4800\cos(\alpha) \to \cos(\alpha) = -\frac{1}{4} \to \alpha \cong 104°29'$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \to 3600 = 6400 + 1600 - 6400\cos(\beta) \to \cos(\beta) = \frac{11}{16} \to \beta \cong 46°34'$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \to 1600 = 6400 + 3600 - 9600\cos(\lambda) \to \cos(\gamma) = \frac{7}{8} \to \gamma \cong 28°57'$$

3. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0$$

Soluzione

L'equazione da risolvere è equivalente al sistema seguente:

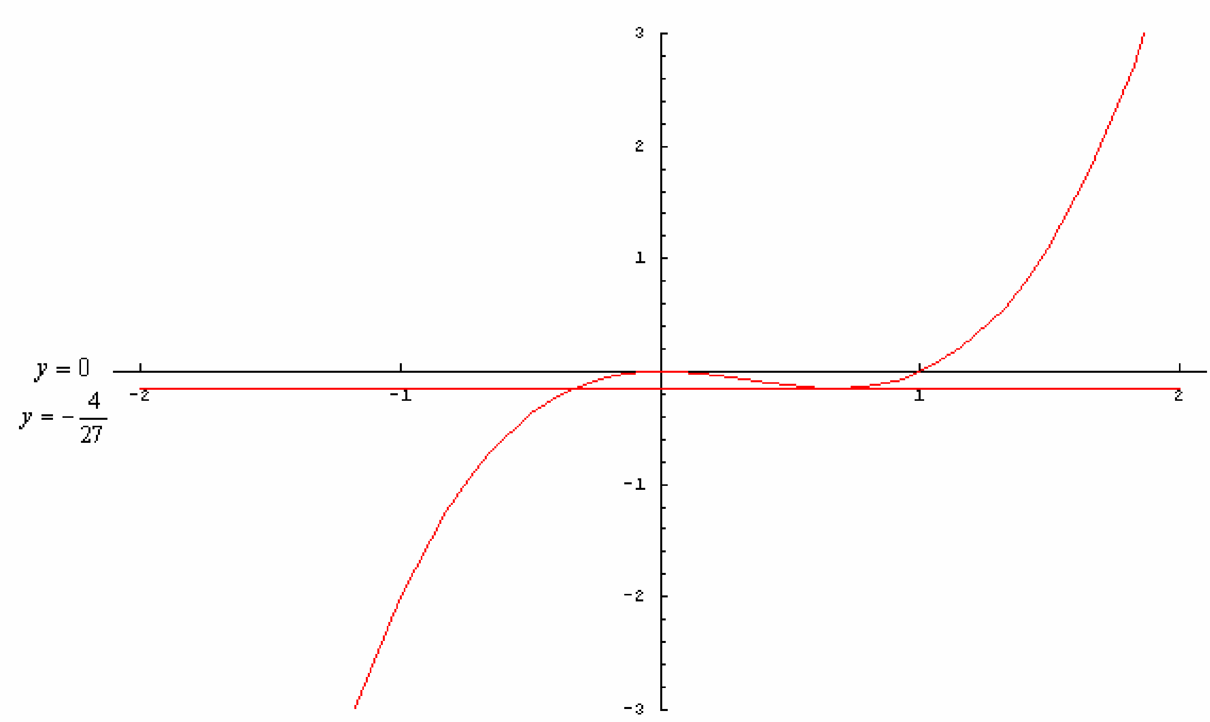
$$\begin{cases} y = x^3 - x^2 \\ y = k - 1 \end{cases}$$

La curva di equazione $y = x^3 - x^2$ è definita in tutto R, interseca le ascisse in $(0,0),(1,0)$ e le ordinate in $(0,0)$, è positiva per $x > 1$, non presenta asintoti. Ha come derivata prima e seconda le seguenti:

$$y'(x) = 3x^2 - 2x > 0 \to x < 0, x > \frac{2}{3}$$
$$y''(x) = 6x - 2 = 0 \to x = \frac{1}{3}$$
$$y''(0) = -2 < 0$$
$$y''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$$

Per cui $(0,0)$ è un massimo, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$ è un minimo e $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right)$.
L'altra curva di equazione $y = k - 1$ non è altro che un fascio di rette parallele alle ascisse.

Rappresentiamo il tutto su uno stesso grafico:



Ora vanno distinti i seguenti casi.

- $k-1<-\frac{4}{27}\rightarrow k<\frac{23}{27}$ la soluzione è unica e negativa;
- $k-1=-\frac{4}{27}\rightarrow k=\frac{23}{27}$ le soluzioni sono tre, una negativa, due positive coincidenti e pari a $x=\frac{2}{3}$;
- $-\frac{4}{27}<k-1<0\rightarrow\frac{23}{27}<k<1$ ci sono tre soluzioni distinte, una negativa e due positive;
- $k=1$ le soluzioni sono tre, due coincidenti e pari a $x=0$ e una pari $x=1$
- $k>1$ la soluzione è unica e positiva.

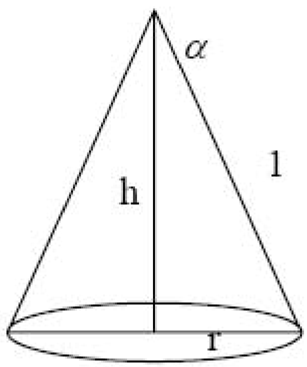
In conclusione

$$k<\frac{23}{27}\cup k>1 \quad 1 \text{ soluzione}$$
$$\frac{23}{27}<k<1 \quad 3 \text{ soluzioni distinte}$$
$$k=\frac{23}{27}, k=1 \quad 3 \text{ soluzioni ma due coincidenti}$$

4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.

Soluzione
Ci sono differenti soluzioni. Ne proponiamo 2.

- Uso della trigonometria



La limitazione geometrica impone $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$h = \cos(\alpha)$

$r = \sin(\alpha)$

$V = \frac{\pi h r^2}{3} = \frac{\pi}{3}\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)$

Calcoliamo le derivate:

$V' = \frac{\pi}{3}\left[-\sin^3(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)\right] = \frac{\pi}{3}\sin(\alpha)\left[3\cos^2(\alpha) - 1\right]$

Per calcolare il segno della derivata calcoliamo il segno di ogni singolo fattore nell'intervallo $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$:

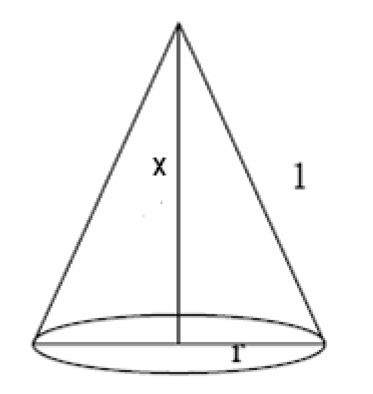
$\sin(\alpha) \ge 0 \to 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$3\cos^2(\alpha) - 1 \ge 0 \to \cos(\alpha) \le -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos(\alpha) \ge \frac{1}{\sqrt{3}} \to 0 \le \alpha \le ar\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Per cui la funzione volume è crescente per $0 \le \alpha \le ar\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e decrescente in $ar\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, per cui presenterà un massimo per $\alpha = ar\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ cioè per $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
In corrispondenza il volume massimo è:

$$V_{MAX} = \frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}m^3 \cong 0.403m^3 \cong 403l$$

- Uso geometria euclidea



La limitazione geometrica è $0 \le x \le 1$

$$h = x$$
$$r = \sqrt{1 - x^2}$$
$$V = \frac{\pi h r^2}{3} = \frac{\pi}{3} x\left(1 - x^2\right)$$
$$V' = \frac{\pi}{3}\left(1 - 3x^2\right) \ge 0 \to 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$$ tenendo conto della limitazione geometrica

Per cui il massimo lo si ha per $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ed il volume vale:

$$V_{MAX} = \frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27} m^3 \cong 0.403 m^3 \cong 403 l$$

5. Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del *teorema del valor medio* (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo [-2, 2]. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.

Soluzione

La funzione in questione è continua e derivabile in tutto R per cui ad essa è applicabile il teorema di Lagrange, per cui

$$\exists c \in (-2,2):\ f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{4}$$

Ora $f(2) = 16,\ f(-2) = 0,\ f'(c) = 3c^2$ per cui si deve imporre $3c^2 = 4 \to c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ entrambi accettabili. Geometricamente questo significa che le due rette tangenti alla curva nei punti $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8(\sqrt{3}+9)}{9}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8(-\sqrt{3}+9)}{9}\right)$ sono parallele alla retta congiungente i punti $(2,16), (-2,0)$

6. Si sa che il prezzo p di un abito ha subito una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?

Soluzione

Sia p il prezzo dell'abito. Distinguiamo i due casi:

- Maggiorazione 6% e poi diminuzione del 6%:

Con la maggiorazione del 6% il prezzo diventa $p' = p + 0.06p = 1.06p$
Con la ulteriore diminuzione il prezzo diventa: $p'' = 1.06p - 1.06p * 0.06 = 0.9964p$

- Diminuzione del 6% e poi maggiorazione del 6%

Con la diminuzione il prezzo diventa: $p' = p - 0.06p = 0.94p$
Con la ulteriore maggiorazione del 6% il prezzo diventa $p'' = 0.94p + 0.94 * 0.06p = 0.9964p$

Quindi l'ordine delle due operazioni è ininfluente ed il prezzo finale dell'abito è stato ridotto del 0.36%.

7. Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo [-2, 2], che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?
Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3 + f(x)$?

Soluzione

In generale l'integrale di una funzione dispari, cioè di una funzione per cui $f(x) = -f(-x)$, in un intervallo simmetrico rispetto all'origine è nullo. Infatti particolareggiando al caso in esame dell'intervallo $[-2,2]$ si ha:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{-2}^{0} f(x)dx$$

Con la sostituzione $x = -t$ nel secondo integrale si ha :

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = -\int_{2}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{2} f(-t)dt = -\int_{0}^{2} f(t)dt$$

per cui

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{-2}^{0} f(x)dx = 0$$

Invece

$$\int_{-2}^{2} [f(x)+3]dx = \int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} 3dx = 0 + 3 * 4 = 12$$

8. Si risolva l'equazione: $4\binom{n}{4}=15\binom{n-2}{3}$

Soluzione

Innanzitutto per la definizione dei coefficienti binomiali in esame deve aversi $n>4, n-2>3 \to n>5$, per cui deve aversi $n>5$.
Ora risolviamo l'equazione

$$4\binom{n}{4}=4\frac{n!}{4!(n-4)!}=4\frac{n!}{24(n-4)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

$$15\binom{n-2}{3}=15\frac{(n-2)!}{3!(n-5)!}=15\frac{(n-2)!}{6(n-5)!}=2$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}=\frac{5(n-2)(n-3)(n-4)}{2}\to n(n-1)(n-2)(n-3)-15(n-2)(n-3)(n-4)=0\to$$

$$(n-2)(n-3)[n(n-1)-15(n-4)]=0\to(n-2)(n-3)(n^2-16n+60)=0\to$$

$$(n-2)(n-3)(n-6)(n-10)=0\to n=2, n=3, n=6, n=10$$

Di cui solo $n=6, n=10$ sono accettabili.

9. Si calcoli l'integrale indefinito $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

Soluzione

Per il calcolo dell'integrale suddetto, effettuiamo l'integrazione per parti:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{-x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)-\int\sqrt{1-x^2}\,dx$$

da cui

$$2\int\sqrt{1-x^2}\,dx=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)+k\to$$

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)\right]+k$$

In particolare

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

In realtà se la traccia ci avesse chiesto di calcolare l'integrale di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ e quindi l'integrale definito e non indefinito, esso poteva essere calcolato anche per sostituzione. Infatti si ha:

$$x = \sin(t) \rightarrow dx = \cos(t)dt$$
$$x = 0 \rightarrow t = 0$$
$$x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

Inoltre trovandoci nel nuovo intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si può affermare che $\sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$ per cui

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1+\cos(2t)}{2}\right]dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Questa sostituzione non la possiamo fare per l'integrale indefinito perché in virtù di essa potremo dire che $\sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)| = \pm\cos(t)$ e quindi non potremo prendere la soluzione positiva o negativa ad arbitrio.

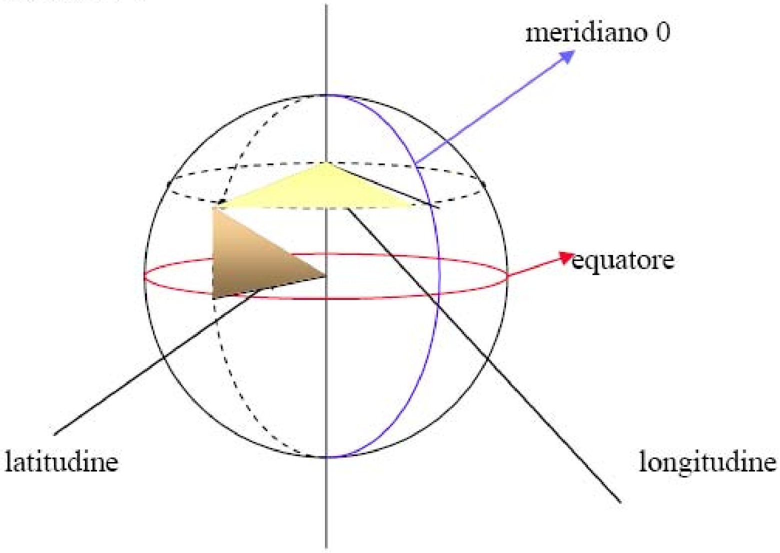
Geometricamente la curva di equazione $y = \sqrt{1-x^2}$ in $[0,1]$ è un quarto di cerchio di raggio unitario la cui area è $\frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi}{4}$ che è pari al valore già trovato.

10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Soluzione

Nel sistema di coordinate terrestri si sceglie come piano fondamentale quello dell'equatore, la direzione fondamentale l'asse di rotazione della Terra. Si suppone che la superficie terrestre sia di forma sferica.
Un qualunque piano che contiene l'asse terrestre (piano meridiano), determina sulla superficie terrestre un cerchio massimo passante per i poli, il circolo meridiano.
Per **meridiano** geografico si intende una semicirconferenza compresa tra i due poli. Ogni meridiano ha un suo antimeridiano. I meridiani sono tutti uguali fra loro.
I **paralleli** sono i circoli formati dall'intersezione tra un qualunque piano parallelo all'equatore e la superficie terrestre. I paralleli sono tanto più piccoli quanto più sono distanti dall'equatore.
Paralleli e meridiani formano un reticolato che permette di identificare la posizione di un qualsiasi punto della superficie terrestre. Per individuare un punto si deve indicare il parallelo e il meridiano che passano per tale punto.
Si fissa convenzionalmente come meridiano fondamentale quello passante per l'Osservatorio astronomico di Greenwich, nei pressi di Londra.

La **longitudine** geografica è la distanza angolare di un punto dal meridiano fondamentale, misurata sull'arco di parallelo che passa per quel punto. Essa corrisponde all'angolo compreso tra il piano del meridiano del punto e il piano del meridiano fondamentale. Può essere EST o OVEST a seconda che il punto si trovi a EST o a OVEST del meridiano fondamentale, varia da 0° per i punti del meridiano fondamentale a 180°, è positiva per i punti a OVEST, negativa per i punti a EST del meridiano fondamentale.
La **latitudine** geografica è la distanza angolare di un punto dall'equatore misurata lungo il meridiano che passa per quel punto. Corrisponde all'angolo compreso tra la verticale del luogo e il piano dell'equatore, varia da +90° polo NOD a -90° polo SUD. I punti lungo l'equatore hanno latitudine 0°.



http://www.vialattea.net/eratostene/gloss/coordinategeografiche.html
http://www.matematicamente.it/magazine/Matematicamente.it%20Magazine%20n.01.pdf