PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiano *Oxy*:

1. si studi la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{3}}$ e se ne tracci il grafico γ.

2. Si determini l'ampiezza degli angoli individuati dai due asintoti

3. Si verifichi che il parallelogramma, avente due lati consecutivi sugli asintoti e un vertice su γ, ha area costante, mentre il suo perimetro ammette un valore minimo ma non un valore massimo.

4. Tra le infinite primitive di $f(x)$ si determini quella che passa per il punto di coordinate $(1,0)$

RISOLUZIONE

Punto 1

Studiamo la funzione $y=\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{3}}$

Dominio: $x \neq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

Intersezione asse ascisse: non ve ne sono in quanto $x^2+1>0\ \forall x \in R$

Intersezione asse ordinate: nessuna $x=0$ non appartiene al dominio;

Simmetrie: la funzione è dispari in quanto

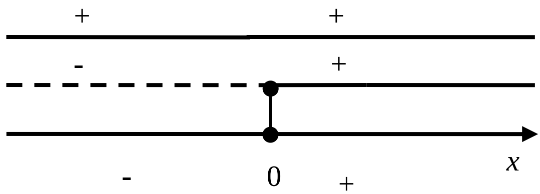
$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)\sqrt{3}}=-\frac{x^2+1}{x\sqrt{3}}=-f(x);$$

Positività:

$N: x^2+1>0\ \forall x \in R$

$D: x\sqrt{3}>0 \Rightarrow x>0$

$y=\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{3}}>0 \Rightarrow x>0$



Asintoti verticali: $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x\sqrt{3}} = -\infty, \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x\sqrt{3}} = +\infty$ per cui $x=0$ è asintoto verticale;

Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x\sqrt{3}} = \pm\infty$ per cui non esistono asintoti orizzontali;

Asintoti obliqui: trattandosi di funzione razionale fratta con grado del numeratore pari al grado del denominatore più 1, l'assenza dell'asintoto orizzontale implica la presenza di quello obliquo; esso ha equazione $y = mx + q$ con

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$q = \lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) = \lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{1}{x\sqrt{3}} \right) = 0$$

quindi l'asintoto obliquo ha equazione $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$;

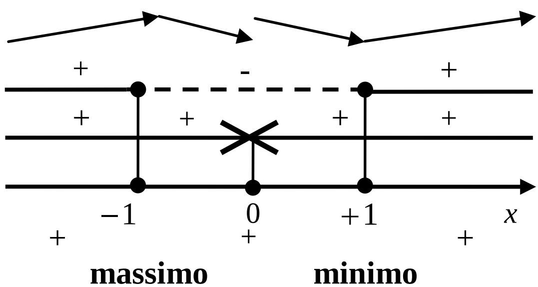
Crescenza e decrescenza: la derivata prima è

$y' = \frac{(2x)\cdot x\sqrt{3} - (x^2+1)\cdot\sqrt{3}}{3x^2} = \frac{x^2-1}{x^2\sqrt{3}}$ il cui quadro dei segni è rappresentato a lato;

$$\mathrm{N}: x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$$

$$\mathrm{D}: x^2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow \forall x \in R - \{0\}$$

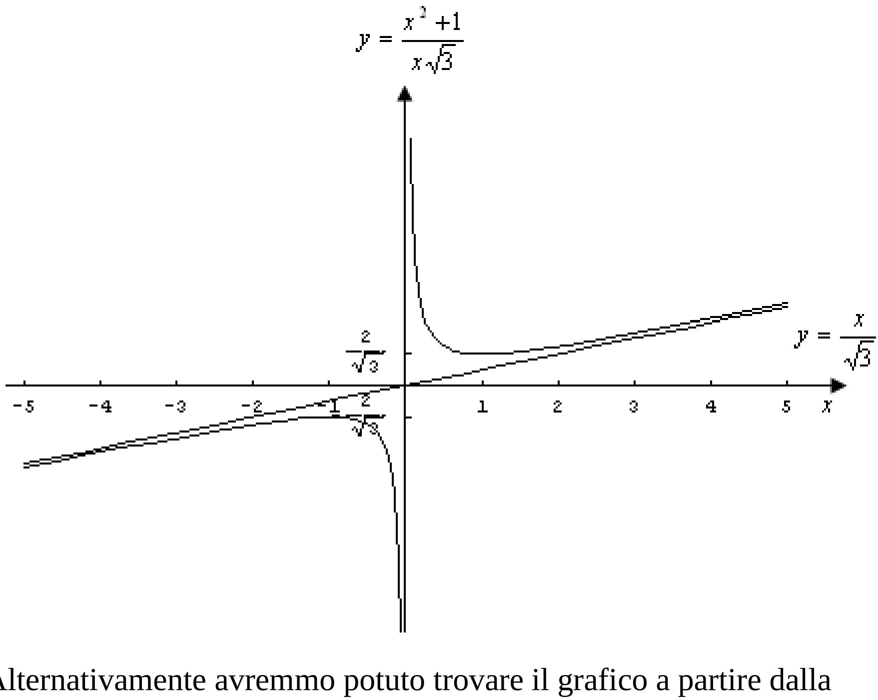
$$\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{3}} > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$$



Quindi la funzione è strettamente crescente in $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ e strettamente decrescente in $(-1,0)\cup(0,1)$ e presenta un massimo relativo nel punto $M\left(-1,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ ed un minimo relativo in $m\left(1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$;

Concavità e convessità: la derivata seconda è $y''=\frac{2}{x^3\sqrt{3}}$ per cui la funzione presenta concavità verso l'alto in $(0,+\infty)$ e verso il basso in $(-\infty,0)$; non esistono flessi.

Il grafico è di seguito presentato:



Alternativamente avremmo potuto trovare il grafico a partire dalla seguente considerazione: la funzione $y=\frac{x^2+1}{x\sqrt{3}}$ può essere scritta come

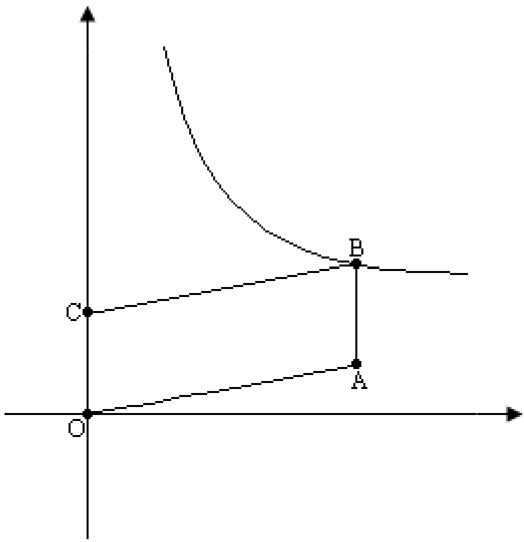
$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{x\sqrt{3}}$ da cui deduciamo che il grafico è una iperbole centro $(0,0)$, di asintoto verticale $x = 0$ ed asintoto obliquo $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Punto 2

L'angolo formato dall'asintoto obliquo di equazione $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ con l'asse delle ascisse è $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$ per cui l'ampiezza degli angoli individuati dai due asintoti sono $\begin{matrix} \beta = 90° - \alpha = 90° - 30° = 60° \\ \gamma = 90° + \alpha = 90° + 30° = 120° \end{matrix}$.

Punto 3

Si consideri la figura seguente in cui si è supposto il vertice B del parallelogramma appartenente all'arco di iperole del primo quadrante:



Il vertice B ha coordinate $B\left(t, \frac{t^2+1}{t\sqrt{3}}\right)$; il vertice A dovendo appartenere all'asintoto obliquo di equazione $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ha coordinate $A\left(t, \frac{t}{\sqrt{3}}\right)$; la base AB del parallelogramma misura $\overline{AB} = \left|\frac{t^2+1}{t\sqrt{3}} - \frac{t}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{|t|\cdot\sqrt{3}}$;

l'altezza è data dalla proiezione di B sull'asse delle ordinate e quindi sarà pari a $h = |t|$. Quindi l'area del parallelogramma sarà

$S(ABCO) = \overline{AB}\cdot h = \frac{1}{|t|\cdot\sqrt{3}}\cdot|t| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ cioè è costante al variare del vertice B lungo l'iperbole. Il perimetro è invece $2p(t) = 2\overline{OA} + 2\overline{AB}$ con $\overline{OA} = \sqrt{t^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\cdot|t|}{\sqrt{3}}$, per cui

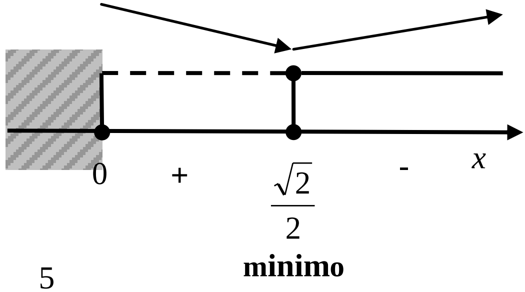
$$2p(t) = 2\overline{OA} + 2\overline{AB} = \frac{4\cdot|t|}{\sqrt{3}} + \frac{2}{|t|\cdot\sqrt{3}} = \frac{4t^2+2}{|t|\cdot\sqrt{3}} = \begin{cases} \frac{4t^2+2}{t\cdot\sqrt{3}} & \text{se } t>0 \\ -\frac{4t^2+2}{t\cdot\sqrt{3}} & \text{se } t<0 \end{cases}.$$

La derivata prima del perimetro è $2p'(t) = \begin{cases} \frac{4t^2-2}{t^2\cdot\sqrt{3}} & \text{se } t>0 \\ \frac{2-4t^2}{t^2\cdot\sqrt{3}} & \text{se } t<0 \end{cases}$ per cui

- se $t > 0$

$2p'(t) > 0 \Rightarrow t > \frac{\sqrt{2}}{2}$

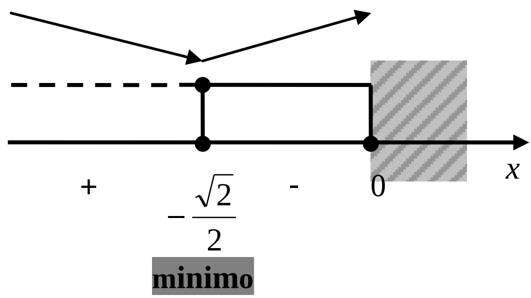
$2p'(t) < 0 \Rightarrow 0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$



- se $t < 0$

$$2p'(t) > 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < t < 0$$

$$2p'(t) < 0 \Rightarrow t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Come si nota dal quadro dei segni, il perimetro del parallelogramma assume valore minimo in corrispondenza di $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ e vale

$$2p\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)+2}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}\ .$$

L’assenza del massimo è dimostrata anche dal fatto che

$$\lim_{t\to 0^-} 2p(t) = \lim_{t\to 0^+} 2p(t) = +\infty$$

$$\lim_{t\to -\infty} 2p(t) = \lim_{t\to +\infty} 2p(t) = +\infty$$

Alternativamente la presenza del minimo è assicurata dal fatto che la funzione perimetro ha la stessa forma della funzione di partenza, cioè si tratta ancora una volta di un’iperbole avente un asinto coincidente con l’asse delle ordinate e l’altro obliquo passante per l’origine;

Punto 4

Le primitive di $y=\frac{x^2+1}{x\sqrt{3}}$ sono date dall'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{3}}dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{x\sqrt{3}}\right)dx=\frac{x^2}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x|+C.$$

La primitiva passante per il punto (1,0) deve soddisfare la condizione

$\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(1)+C=0\rightarrow C=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ per cui la primitiva richiesta è

$$h(x)=\frac{x^2-1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x|.$$

PROBLEMA 2

E' dato il fascio di cubiche di equazione $y = kx^3 - kx^2 + 2kx + 1$, dove k è un parametro reale non nullo

1. Si verifichi che tutte le curve del fascio hanno in comune con l'asse delle y lo stesso punto C, di cui si chiedono le coordinate
2. Si mostri che, qualunque sia il valore di k, la curva corrispondente incontra in un sol punto P_k l'asse delle x. Si verifichi altresì che se $k = 1$ l'ascissa di P_1 è compresa fra -1 e 0.
3. Si disegnino la curva γ del fascio corrispondente a $k = \frac{1}{4}$ e la retta t tangente a γ nel punto C
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da γ, da t e dalla retta di equazione $x = -2$

Punto 1

Ponendo $x = 0$ nell'equazione del fascio otteniamo immediatamente $y = 1$, per cui l'unico punto di intersezione con l'asse delle ordinate comune a tutte le cubiche del fascio è $C(0,1)$.

Punto 2

Innanzitutto valutiamo come si comporta il fascio di cubiche agli estremi del dominio di definizione e quindi per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(kx^3 - kx^2 + 2kx + 1\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > 0 \\ -\infty & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(kx^3 - kx^2 + 2kx + 1\right) = \begin{cases} -\infty & \text{se } k > 0 \\ +\infty & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

Valutiamo ora la derivata prima del fascio: $y' = k \cdot \left(3x^2 - 2x + 2\right)$ che al variare di $k \in R - \{0\}$ risulta essere o sempre positiva, se $k > 0$, o

sempre negativa se $k<0$ in quanto il discriminante risulta essere $\Delta=-5k^2<0\ \forall k\in R-\{0\}$.
Poiché la generica cubica del fascio assume valori discordi agli estremi del dominio ed è strettamente crescente o strettamente decrescente, per il teorema di unicità degli zeri esiste un unico zero α dell'equazione $k\alpha^3-k\alpha^2+2k\alpha+1=0$ nell'intervallo $(-\infty,+\infty)$.
Consideriamo il caso particolare $k=1$; la cubica corrispondente ha equazione $y=x^3-x^2+2x+1$; notiamo che $y(-1)=-3<0, y(0)=1>0$ per cui l'unico zero apparterrà all'intervallo $(-1,0)$.
Si ricava il valore approssimato ricorsivamente mediante la formula $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^3-x_n^2+2x_n+1}{3x_n^2-2x_n+2}=\frac{2x_n^3-x_n^2-1}{3x_n^2-2x_n+2}$ con punto iniziale $x_0=-1$ in quanto $f(x_0)$ ed $f''(x_0)$ sono concordi.
La tabella seguente mostra tutti i passi dell'algoritmo per il calcolo della radice a meno di 10^{-2}:

n	x_n	$x_{n+1}=\frac{2x_n^3-x_n^2-1}{3x_n^2-2x_n+2}$	$e=\lvert x_n-x_{n-1}\rvert$
0	-1,000	-0,571	
1	-0,571	-0,412	0,429
2	-0,412	-0,393	0,159
3	-0,393	**-0,393**	0,019
4	**-0,393**		**0,000**

Il valore approssimato con due cifre decimali esatte è quindi $\alpha\approx-0,39$

Punto 3

Studiamo la funzione $y=\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1=\frac{(x+1)(x^2-2x+4)}{4}$

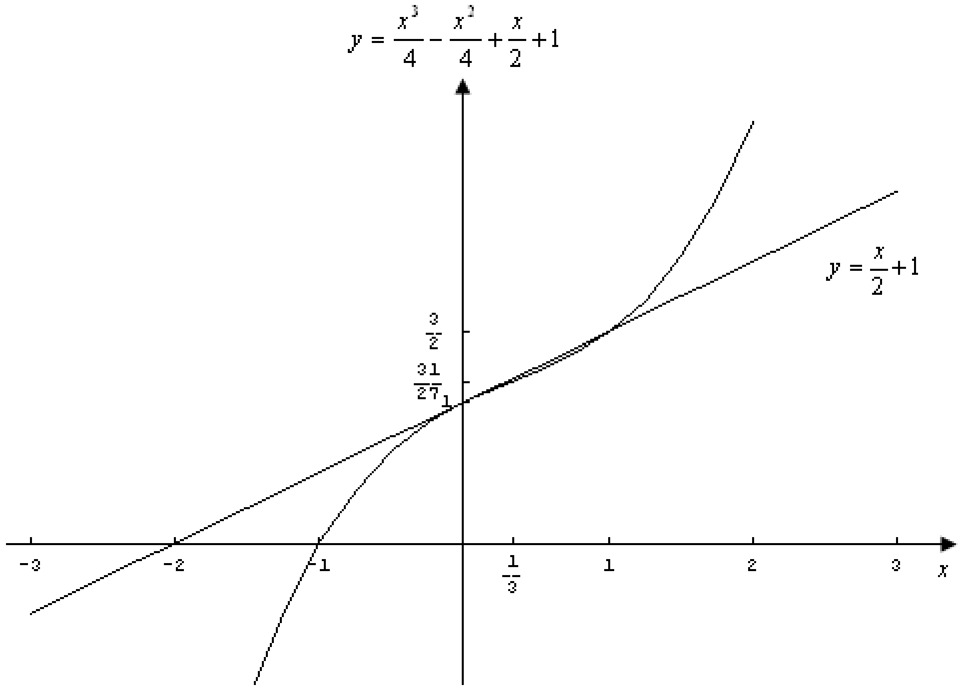
Dominio: R;

Intersezione asse ascisse: $y=\frac{(x+1)(x^2-2x+4)}{4}=0\rightarrow x=-1$

Intersezione asse ordinate: $C(0,1)$ come ricavato al Punto 1;
Simmetrie: la funzione non è nè pari nè dispari;
Positività: poiché $(x^2-2x+4)>0\ \forall x\in R$ lo studio della positività si riduce allo studio della positività del fattore $(x+1)$, per cui $y=\frac{(x+1)(x^2-2x+4)}{4}>0 \Rightarrow x>-1$ cioè la funzione è positiva in $(-1,+\infty)$ e negativa in $(-\infty,-1)$;
Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto il dominio è R;
Asintoti orizzontali: non ve ne sono in quanto $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)=\pm\infty$;
Asintoti obliqui: non esistono in quanto il dominio è R;
Crescenza e decrescenza: come evidenziato nel Punto 2, essendo $k=\frac{1}{4}>0$ la cubica è strettamente crescente in tutto il dominio R;
Concavità e convessità: la derivata seconda è $y''=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ per cui la funzione presenta concavità verso l'alto in $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ e verso il basso in $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$; la curva presenta un flesso a tangente obliqua in $F\left(\frac{1}{3},\frac{31}{27}\right)$.

La retta *t* passante per C e tangente alla cubica ha equazione $y=\frac{x}{2}+1$.

Il grafico della cubica e la retta tangente *t* sono di seguito presentati nello stesso riferimento cartesiano:



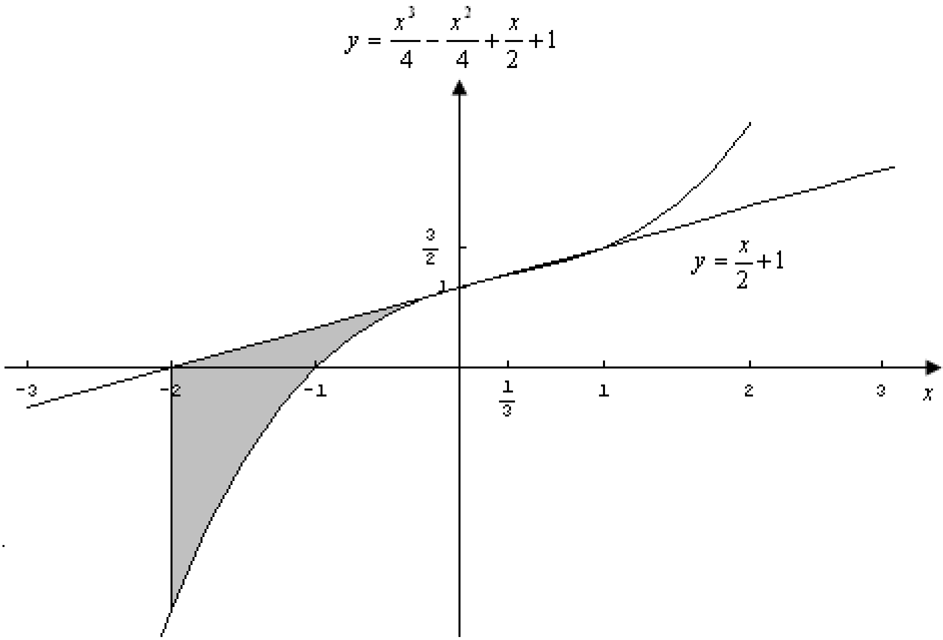
La curva e la tangente in C si incontrano in un ulteriore punto: infatti risolvendo l'equazione

$\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1=\frac{x}{2}+1 \rightarrow \frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{4}=0 \rightarrow x=0 \vee x=1$ per cui

l'ulteriore intersezione è $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

Punto 4

L'area da calcolare è raffigurata in grigio di seguito:



L'area richiesta è pari a:

$$S = \int_{-2}^{0} \left[\left(\frac{x}{2} + 1 \right) - \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1 \right) \right] dx = \int_{-2}^{0} \left(-\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{4} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{12} \right]_{-2}^{0} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Sia γ il grafico di $y = \frac{10x}{x^2+1}$. Si trovi l'equazione della retta normale a γ nel punto $(2,4)$.

La normale nel punto (2,4) è la perpendicolare alla tangente nello stesso punto. L'equazione della tangente in (2,4) è $y = m(x-2)+4$ dove il coefficiente angolare è pari al valore della derivata prima in $x=2$; la derivata prima è $y' = \frac{10(x^2+1)-10x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{10(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ per cui

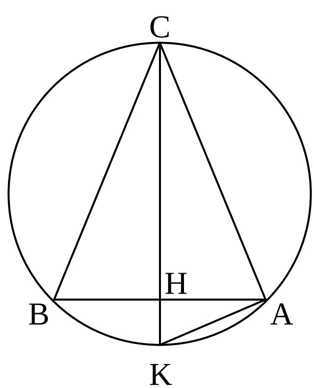
$m = y'(2) = -\frac{6}{5}$. L'equazione della normale sarà quindi

$y = -\frac{1}{m}(x-2)+4 = \frac{5}{6}(x-2)+4 = \frac{5}{6}x+\frac{7}{3}$.

Quesito 2

Si determini il cono rotondo di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 30cm

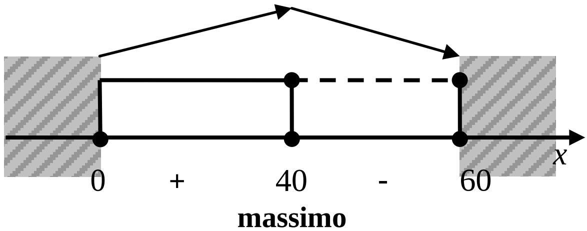
Si consideri la figura a lato rappresentante in sezione il cono inscritto nel cerchio. Poniamo $\overline{HC} = x$ con $0 < x < 60$; di conseguenza $\overline{HK} = 60 - x$ ed applicando il teorema di Euclide $\overline{AH}^2 = \overline{HC} \cdot \overline{HK} = x \cdot (60-x)$. Il volume del cono è $V(x) = \frac{\pi \cdot \overline{AH}^2 \cdot \overline{HC}}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 \cdot (60-x)$.



La massimizzazione del volume la effettuiamo mediante derivazione: la derivata prima del volume è $V'(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\left[2x\cdot(60-x)+x^2\cdot(-1)\right]=\pi\cdot\left(40x-x^2\right)$, per cui:

$V'(x)=\pi\cdot\left(40x-x^2\right)>0\rightarrow 0<x<40$

$V'(x)=\pi\cdot\left(40x-x^2\right)<0\rightarrow 40<x<60$



Dal quadro dei segni della derivata prima, ricaviamo che il volume è massimo quando l'altezza misura

$x=40$ e vale $V_{MAX}=V(40)=\frac{\pi}{3}\cdot 40^2\cdot(60-40)=\frac{32000}{3}\pi\left[cm^3\right]$.

Quesito 3

Quale è la derivata di $f(x)=3^{\pi x}$? Si giustifichi la risposta.

La funzione $f(x)=3^{\pi\cdot x}$ può essere riscritta come

$f(x)=e^{\ln\left(3^{\pi\cdot x}\right)}=e^{\pi\cdot x\cdot\ln(3)}$ la cui derivata è

$$f'(x)=e^{\pi\cdot x\cdot\ln(3)}\cdot\frac{d(\pi\cdot x\cdot\ln(3))}{dx}=\pi\cdot\ln(3)\cdot e^{\pi\cdot x\cdot\ln(3)}=\pi\cdot\ln(3)\cdot 3^{\pi\cdot x}.$$

Quesito 4

Si dimostri che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica

Dati due numeri $x>0, y>0$, la media geometrica è $M_G=\sqrt{xy}$ mentre la media aritmetica è $M_A=\frac{x+y}{2}$; dimostriamo che $M_A \geq M_G \ \forall x>0, y>0$. Dobbiamo provare che $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$; elevando al quadrato ambo i membri la disequazione diventa

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy \rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{xy}{2}-xy \geq 0 \rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{xy}{2} \geq 0 \rightarrow \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \geq 0$$

e quest'ultima è vera $\forall x, y \in R$. In particolare la media geometrica coincide con quella aritmetica solo nel caso in cui $x=y$.

Quesito 5

La regione R del primo quadrante delimitata dal grafico di $y=3e^{-x}$ e dalla retta $x=\ln 3$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.

Le sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati di area $A(x)=L^2(x)=\left(3e^{-x}\right)^2=9e^{-2x}$; il volume richiesto è pertanto

$$V=\int_0^{\ln 3} A(x)\,dx=\int_0^{\ln 3} 9e^{-2x}dx=\left[-\frac{9}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln 3}=-\frac{9}{2}e^{-2\ln 3}+\frac{9}{2}=-\frac{9}{2}e^{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}+\frac{9}{2}$$

$$=-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=4$$

Quesito 6

Un prisma a base quadrata ha altezza x e spigolo di base y tali che $x+y=3$. Quale è il suo volume massimo?

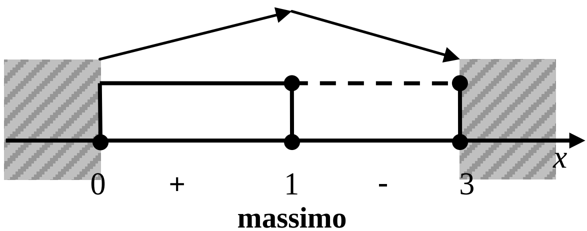
Il volume di un prisma è $V = A_b \cdot h$ cioè il prodotto dell'area di base per l'altezza. Nel caso in esame la base è quadrata e lo spigolo misura $y = 3 - x$ con $0 < x < 3$, di conseguenza $A_b = (3-x)^2$ e $V(x) = (3-x)^2 \cdot x$.

La massimizzazione del volume la effettuiamo mediante derivazione: la derivata prima del volume è

$$V'(x) = -2\cdot(3-x)\cdot x + (3-x)^2 = 2x^2 - 6x + x^2 - 6x + 9 =$$
$$= 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3),$$

per cui:

$$V'(x) = 3(x-1)(x-3) > 0 \rightarrow 0 < x < 1$$
$$V'(x) = 3(x-1)(x-3) < 0 \rightarrow 1 < x < 3$$



Dal quadro dei segni della derivata prima, ricaviamo che il volume è massimo per $x = 1$ e vale

$V_{MAX} = V(1) = 4$.

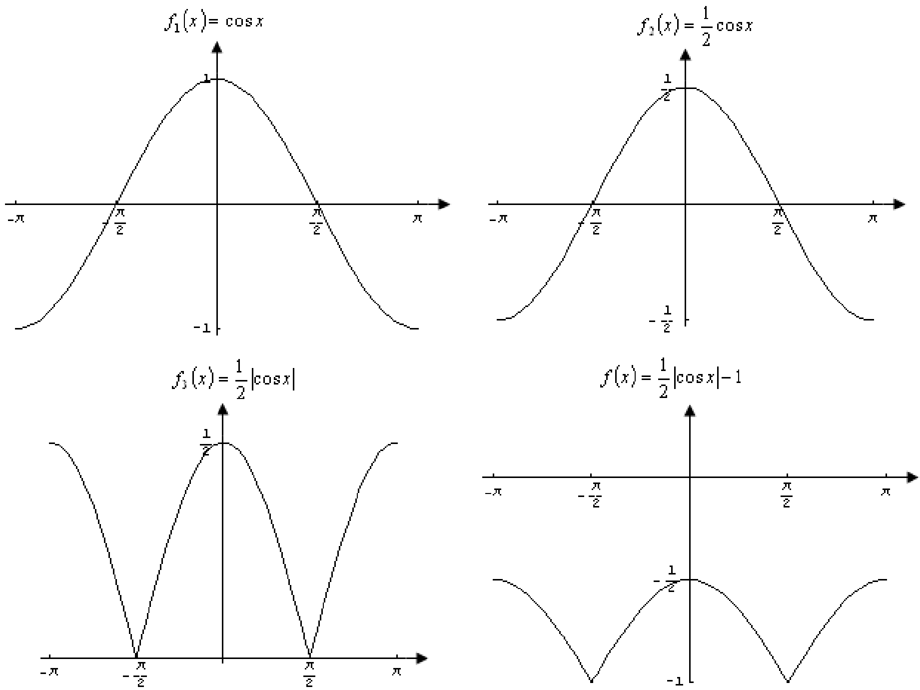
Quesito 7

Si disegni, nell'intervallo $\left]-\pi,\pi\right]$, il grafico della funzione $f(x)=\frac{1}{2}|\cos x|-1$

Il grafico della funzione $f(x)=\frac{1}{2}|\cos x|-1$ può essere ricavato seguendo i seguenti passi:

1. si traccia il grafico di $f_1(x)=\cos x$;
2. si ricava dal grafico precedente, moltiplicando per $\frac{1}{2}$ le ordinate, il grafico di $f_2(x)=\frac{1}{2}\cos x$;
3. si ricava dal grafico di $f_2(x)=\frac{1}{2}\cos x$, ribaltando verso le ordinate positive le parti di grafico al di sotto dell'asse delle ascisse, quello di $f_3(x)=\frac{1}{2}|\cos x|$;
4. si ricava dal grafico di $f_3(x)=\frac{1}{2}|\cos x|$, traslando di una unità verso le ordinate negative, quello di $f(x)=\frac{1}{2}|\cos x|-1$.

Di seguito vngono mostrati i grafici relativi ai 4 passi sopra descritti:



Quesito 8

Si consideri una parabola del fascio $y = x^2 - ax$ e siano *r* e *s* le rette ad essa tangenti rispettivamente nell'origine del sistema di riferimento *Oxy* e nel punto T di ascissa 2°. Sia *P* il punto di intersezione fra *r* e *s*. Si calcoli:

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{OP}{PT}$$

La tangente alla parabola di equazione $y = x^2 - ax$ nell'origine $\mathrm{O}(0,0)$ ha equazione $y = mx$ con $m = y'(0) = [2x - a]_{x=0} = -a$ per cui la tangente in $\mathrm{O}(0,0)$ ha equazione $y = -ax$. La tangente nel punto $\mathrm{T}(2a, 2a^2)$ ha equazione $y = m(x - 2a) + 2a^2$ con

$m = y'(2a) = [2x - a]_{x=2a} = 3a$ per cui la tangente in $\mathrm{T}(2a, 2a^2)$ ha equazione $y = 3a(x - 2a) + 2a^2 = 3ax - 4a^2$.

Le coordinate del punto P le ricaviamo dal seguente sistema

$$\begin{cases} y = -ax \\ y = 3ax - 4a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = -a^2 \end{cases} \rightarrow \mathrm{P}(a, -a^2).$$

I segmenti OP e PT hanno pertanto le seguenti lunghezze:

$$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{a^2 + a^4} = \sqrt{a^4\left(\frac{1}{a^2} + 1\right)} = a^2\sqrt{\frac{1}{a^2} + 1}$$

$$\overline{\mathrm{PT}} = \sqrt{a^2 + 9a^4} = \sqrt{a^4\left(\frac{1}{a^2} + 9\right)} = a^2\sqrt{\frac{1}{a^2} + 9}$$

Di conseguenza il limite richiesto vale

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{PT}}} = \lim_{a \to +\infty} \frac{a^2\sqrt{\frac{1}{a^2} + 1}}{a^2\sqrt{\frac{1}{a^2} + 9}} = \lim_{a \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{a^2} + 1}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + 9}} = \frac{1}{3}.$$