

PROBLEMA 1

In un sistema di assi cartesiani ortogonali $O x y$ una curva γ ha per equazione

$$y = \frac{3(x-1)^2}{ax^2 + bx + c}.$$

1. Si calcolino i valori delle costanti reali a, b, c , sapendo che γ ha per asintoti le rette di equazioni $y = 3$ e $x = -2$, e passa per il punto $(3, 12/5)$.
2. Si studi la funzione così ottenuta e si disegni il relativo grafico.
3. L'equazione di γ può porsi sotto la forma:

$$y = 3 + \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2}.$$

Si determinino le costanti α e β

4. Si calcoli l'area della superficie piana, finita, delimitata da γ , dall'asse x e dalle rette $x = 4$ e $x = k$, essendo k l'ascissa del punto in cui la curva incontra l'asintoto orizzontale.

RISOLUZIONE

Punto 1

La funzione deve avere $x = -2$ come asintoto verticale e $y = 3$ come asintoto orizzontale.

La retta $x = -2$ è asintoto verticale se

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3(x-1)^2}{ax^2 + bx + c} = \frac{27}{4a - 2b + c} = \infty \text{ e quindi se si annulla il denominatore, cioè } 4a - 2b + c = 0.$$

La retta $y = 3$ è asintoto orizzontale se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3(x-1)^2}{ax^2 + bx + c} = \frac{3}{a} = 3$ e quindi se $a = 1$.

Il passaggio per $\left(3, \frac{12}{5}\right)$ permette di ricavare la terza condizione

$$\frac{12}{9a+3b+c} = \frac{12}{5} \rightarrow 9a+3b+c=5.$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} a=1 \\ 4a-2b+c=0 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2b-c=4 \\ 3b+c=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-4 \end{cases} \text{ da cui } y = \frac{3(x-1)^2}{x^2-4}.$$

Punto 2

Studiamo la funzione $y = \frac{3(x-1)^2}{x^2-4}$

Dominio: $\mathbb{R}$;

Intersezione asse ascisse: $y = \frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = 0 \rightarrow x=1$

Intersezione asse ordinate: $x=0 \rightarrow y = -\frac{3}{4}$

Simmetrie: la funzione non è nè pari nè dispari;

Positività: essendo $(x-1)^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, la funzione è positiva se $x^2-4 > 0$ e quindi se $x < -2 \vee x > 2$;

Asintoti verticali: come indicato nella traccia $x = -2$ è asintoto verticale

e in particolare $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = -\infty$; inoltre

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = +\infty$ per cui anche $x = 2$ è asintoto verticale;

Asintoti orizzontali: come indicato nella traccia $y = 3$ è asintoto orizzontale destro e sinistro;

Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto la funzione è razionale fratta e la presenza dell'asintoto orizzontale esclude la presenza di quello obliquo;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è

$$f'(x) = \frac{6(x-1)(x^2-4) - 3(x-1)^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{6(x-1)(x-4)}{(x^2-4)^2}; \text{essendo}$$

$(x^2-4)^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$, la derivata prima è positiva se $(x-1)(x-4) > 0$ e quindi se $x < -2 \vee -2 < x < 1 \vee x > 4$ intervalli nei quali la funzione è strettamente crescente; in particolare la funzione presenta un massimo relativo in $M(1,0)$ ed un minimo relativo in

$$m\left(4, \frac{9}{4}\right);$$

Concavità e convessità: la derivata seconda è

$$f''(x) = -\frac{6(2x^3 - 15x^2 + 24x - 20)}{(x^2-4)^3}; \text{ per ricavare i flessi basta trovare}$$

gli zeri della derivata seconda e quindi risolvere l'equazione

$$g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 20 = 0; \text{ in particolare attraverso}$$

considerazioni basate sul comportamento agli estremi, sulla crescenza e concavità di $g(x)$ deduciamo che $g(x)$ ammette un solo zero

appartenente all'intervallo $(5,6)$: infatti in tale intervallo è strettamente crescente ed assume valore discorde agli estremi per cui a norma del teorema degli zeri esiste un unico zero in $(5,6)$. Tale zero è ricavabile attraverso uno dei metodi numerici come quello di Newton-Raphson che permette di ricavare ricorsivamente lo zero attraverso la formula

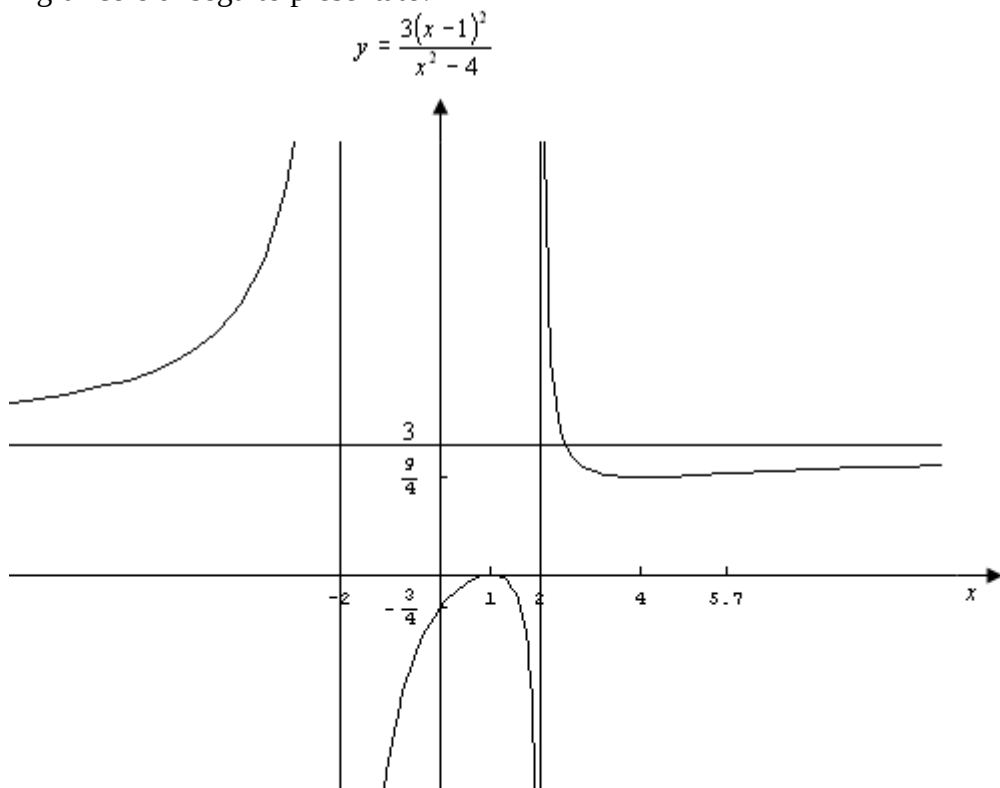
$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \text{ con punto iniziale } x_0 = 6.$$

Di seguito il metodo in forma tabellare

n	x_n	x_{n+1}	$e = x_n - x_{n-1} $
0	6,000	5,733	
1	5,733	5,704	0,267
2	5,704	5,703	0,030
3	5,703	5,703	0,000

Con un errore inferiore a 10^{-2} l'unico flesso a tangente obliqua ha ascissa $x \approx 5,70$.

Il grafico è di seguito presentato:



Punto 3

Effettuando il minimo comune multiplo si ha:

$$f(x) = \frac{3(x-1)^2}{x^2 - 4} = 3 + \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3x^2 - 6x + 3}{x^2 - 4} = \frac{3x^2 + (\alpha + \beta)x + (2\alpha - 2\beta - 12)}{x^2 - 4}$$

e sfruttando il principio di identità dei polinomi ricaviamo il seguente sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -6 \\ 2\alpha - 2\beta - 12 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = -12 \\ 2\alpha - 2\beta = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{4} \\ \beta = -\frac{27}{4} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = 3 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{27}{4}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

Punto 4

Per calcolare le intersezioni della funzione con l'asintoto orizzontale basta risolvere l'equazione

$$\frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = 3 \rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 4 \rightarrow -2x + 1 = -4 \rightarrow x = \frac{5}{2}; \text{ quindi la}$$

funzione interseca l'asintoto orizzontale nel punto ad ascissa $x = \frac{5}{2}$.

L'area richiesta è quindi

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{5}{2}}^4 \left[3 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{27}{4}\left(\frac{1}{x+2}\right) \right] dx = \left[3x + \frac{3}{4}\ln|x-2| - \frac{27}{4}\ln|x+2| \right]_{\frac{5}{2}}^4 = \\ &= 12 + \frac{3}{4}\ln 2 - \frac{27}{4}\ln 6 - \frac{15}{2} - \frac{3}{4}\ln \frac{1}{2} + \frac{27}{4}\ln \frac{9}{2} = \\ &= 12 + \frac{3}{4}\ln 2 - \frac{27}{4}\ln 6 - \frac{15}{2} + \frac{3}{4}\ln 2 + \frac{27}{4}\ln \frac{9}{2} = \\ &= \frac{9}{2} + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{27}{4}\ln \frac{3}{4} = \frac{9}{2} + 3\ln \frac{9\sqrt[4]{3}}{16} \end{aligned}$$

PROBLEMA 2

Sia data la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1. Si determini il dominio di $f(x)$ e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.
2. Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ .
3. Si calcoli l'area della parte di piano R racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.
4. La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S . In S si inscriba un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinché il suo volume sia massimo.

RISOLUZIONE

Punto 1

Il dominio della funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ è dato da:

$$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Nel dominio la funzione è continua.

La derivata prima è

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ da cui}$$

deduciamo che la funzione non è derivabile nei punti $x = \pm 1$ in cui presenta una tangente verticale; infatti $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$. In

conclusione la funzione è derivabile in tutti i punti del dominio esclusi i punti con ascisse $x = \pm 1$.

Punto 2

Studiamo la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Dominio: $-1 \leq x \leq 1$;

Intersezione asse ascisse: $f(x) = x\sqrt{1-x^2} = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$

Intersezione asse ordinate: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$

Simmetrie: la funzione è dispari in quanto

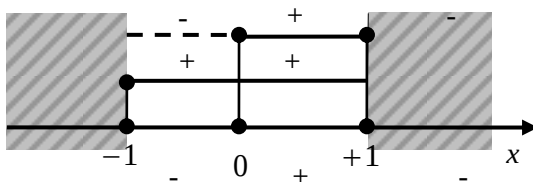
$$f(-x) = -x\sqrt{1-(-x)^2} = -x\sqrt{1-x^2} = -f(x)$$

Positività:

$$x > 0$$

$$1 - x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$



Asintoti verticali: non ve ne

sono in quanto $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$;

Asintoti orizzontali: non esistono visto il dominio chiuso $[-1, 1]$;

Asintoti obliqui: non esistono visto il dominio chiuso $[-1, 1]$;

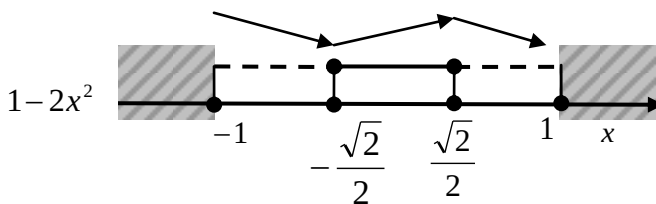
Crescenza e

decrecenza:

la derivata prima è

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ il}$$

quadro dei segni è a lato presentato: da



esso deduciamo la presenza di un minimo relativo $m = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ed

un massimo relativo $M = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

Concavità e convessità: la derivata seconda è

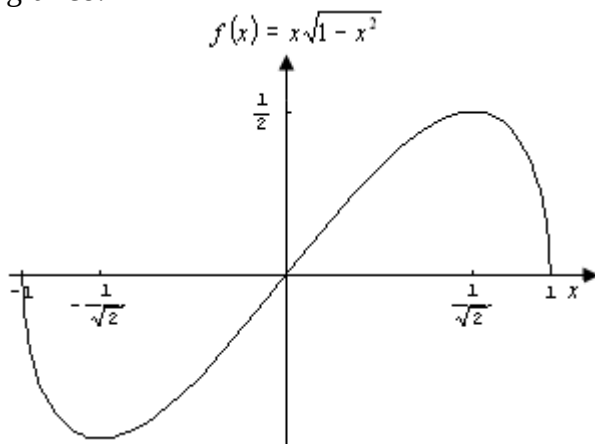
$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2)\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-4x(1-x^2) + x(1-2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^3 - 3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

per cui, ricordando che il dominio è $-1 \leq x \leq 1$, si ha

$$f''(x) > 0 \rightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3x > 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0 \vee x > \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 < x < 1 \end{cases} \rightarrow -1 < x < 0$$

per cui la funzione presenta concavità verso l'alto in $(-1,0)$ e verso il basso in $(0,1)$; la funzione presenta quindi un flesso a tangente obliqua $F = (0,0)$ con tangente inflessionale di equazione $y = x$.

Di seguito il grafico:

**Punto 3**

L'area richiesta è

$$S = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 -\frac{1}{2} \frac{d(1-x^2)}{dx} \sqrt{1-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Punto 4

Sia $P(x, x\sqrt{1-x^2})$ con $0 < x < 1$ un punto generico appartenente al ramo del primo quadrante della funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$. Il raggio del cono inscritto sarà pari all'ordinata del punto P e cioè $R = x\sqrt{1-x^2}$ mentre l'altezza sarà pari all'ascissa e cioè $h = x$. Il volume del cono sarà allora $V(x) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 \cdot (1-x^2) \cdot x = \frac{\pi}{3} \cdot (x^3 - x^5)$. La massimizzazione la effettuiamo mediante derivazione: la derivata prima è $V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot (3x^2 - 5x^4)$ per cui la funzione volume, ricordando la

limitazione geometrica $0 < x < 1$ è strettamente crescente in $\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ e

strettamente decrescente in $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 1\right)$ da cui deduciamo che il volume è

massimo quando l'altezza è pari a $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ ed il raggio è pari a

$R = \frac{\sqrt{6}}{5}$. Il valore massimo è pertanto pari a

$$V\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{9}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{2\pi}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

QUESTIONARIO**Quesito 1**

Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$y = \frac{\sqrt{2\sin(2x) - \sqrt{3}}}{\log \cos x} \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Il dominio della funzione $y = \frac{\sqrt{2\sin(2x) - \sqrt{3}}}{\log \cos x}$, limitandoci

all'intervallo $[0, 2\pi]$, è dato dalla risoluzione del seguente sistema:

$$D: \begin{cases} 2\sin(2x) - \sqrt{3} \geq 0 \\ \cos x > 0 \\ \log \cos x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin(2x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x > 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \\ x \neq 0 \wedge x \neq 2\pi \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \\ x \neq 0 \wedge x \neq 2\pi \end{cases} \rightarrow D: \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$$

Quesito2

Si calcoli il limite della funzione $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, quando x tende a 1^+ .

Scriviamo il limite nel seguente modo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} \right]$$

Il termine $\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}}$ può essere così razionalizzato:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} &= \frac{(\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x} + 1)} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x} + 1)} = \\ &= \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x} + 1)} \end{aligned}$$

Il limite così diventa:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} \right] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x} + 1)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{0}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Quesito 3

Si provi che le due funzioni $f(x) = \cos^2 x$ e $g(x) = -\sin^2 x$ hanno le derivate uguali e se ne dia una giustificazione.

La derivata della funzione $f(x) = \cos^2 x$ è

$$f'(x) = 2 \cdot \cos x \cdot \frac{d(\cos x)}{dx} = -2 \cdot \sin x \cdot \cos x; \text{ analogamente la derivata}$$

della funzione $g(x) = -\sin^2 x$ è

$$g'(x) = -2 \cdot \sin x \cdot \frac{d(\sin x)}{dx} = -2 \cdot \sin x \cdot \cos x; \text{ le due derivate coincidono}$$

in quanto le due funzioni differiscono per una costante la cui derivata è nulla: infatti $f(x) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 + g(x)$.

Quesito 4

Un rettangolo ABCD è tale che risulta $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 1$.

Si determini il triangolo isoscele di area minima circoscritto al rettangolo e tale che la base contenga il segmento AB.

Consideriamo la figura a lato.

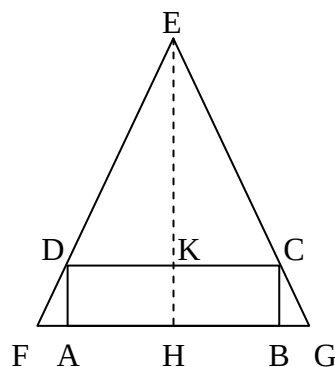
Poniamo $\overline{EK} = x$ con $x > 0$. I triangoli EKC ed EHG sono simili, essendo rettangoli con un angolo in comune, per cui vale la seguente proporzione tra lati omologhi

$$\overline{EK} : \overline{KC} = \overline{EH} : \overline{HG}, \text{ cioè } x : 2 = (x+1) : \overline{HG} \text{ da}$$

$$\text{cui } \overline{HG} = 2 \left(\frac{x+1}{x} \right). \text{ L'area del triangolo EFG è}$$

dunque pari a

$$S(x) = \frac{\overline{FG} \cdot \overline{EH}}{2} = \frac{4 \left(\frac{x+1}{x} \right) \cdot (x+1)}{2} = 2 \frac{(x+1)^2}{x}.$$



La minimizzazione la effettuiamo mediante derivazione: la derivata

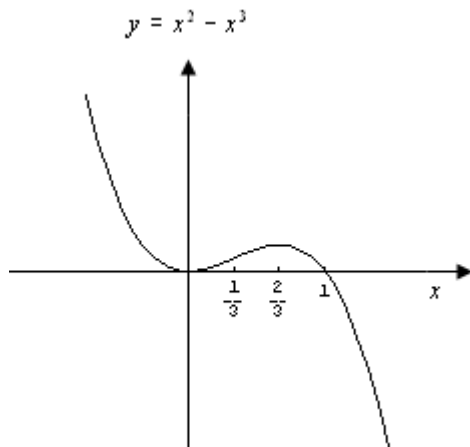
prima è $S'(x) = 2 \left[\frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \right]$ che risulta essere positiva per

$x < -1 \vee x > 1$; ricordando la limitazione geometrica $x > 0$, possiamo affermare che la funzione è strettamente decrescente in $(0,1)$ e strettamente crescente in $(1,+\infty)$ per cui è presente un minimo per $x = 1$ cui corrisponde il valore minimo dell'area pari a $S(1) = 8$.

Quesito 5

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = x^2 - x^3$ e dall'asse delle x .

La cubica $y = x^2 - x^3$ interseca l'asse delle ascisse nei punti $(0,0)$ e $(1,0)$, quello delle ordinate in $(0,0)$, è positiva in $(-\infty,0) \cup (0,1)$, presenta un minimo relativo in $m(0,0)$, un massimo relativo in $M\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{27}\right)$ ed un flesso a tangente obliqua in $F\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$. Il suo grafico è presentato di seguito.



Il volume richiesto è

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^3)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^6 - 2x^5 + x^4) dx = \pi \left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi}{105}$$

Quesito 6

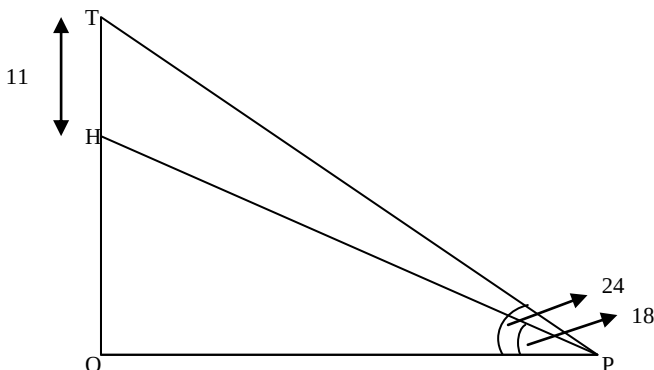
In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24° . Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

Consideriamo la figura a lato. Dobbiamo calcolare la lunghezza del segmento PO. Applicando il teorema dei triangoli rettangoli ai triangoli POT e POH si ha la relazione

$$\overline{PO} \cdot \tan(24^\circ) - \overline{PO} \cdot \tan(18^\circ) = 11$$

da cui

$$\overline{PO} = \frac{11}{\tan(24^\circ) - \tan(18^\circ)} \cong 91 \text{ m}$$



Quesito 7

Considerata la funzione $f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

Il limite richiesto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per cui possiamo applicare il teorema di de l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln 3 \cdot 3^{3x} - \ln a \cdot a^x}{\ln 6 \cdot 6^x - \ln 5 \cdot 5^x} = \frac{3 \ln 3 - \ln a}{\ln 6 - \ln 5} = \frac{\ln \frac{27}{a}}{\ln \frac{6}{5}}.$$

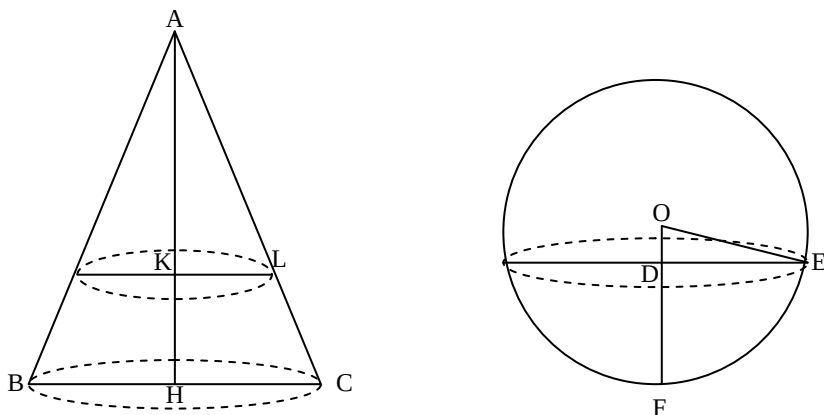
Imponendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x} = 2$ si ha

$$\frac{\ln \frac{27}{a}}{\ln \frac{6}{5}} = 2 \rightarrow \ln \frac{27}{a} = 2 \ln \frac{6}{5} \rightarrow \ln \frac{27}{a} = \ln \frac{36}{25} \rightarrow \frac{27}{a} = \frac{36}{25} \rightarrow a = \frac{75}{4}.$$

Quesito 8

Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r . A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β , perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

Si consideri la figura seguente:



Indichiamo con x , $0 < x < 2r$, la distanza tra piani α e β .

Le intersezioni del piano β con il cono e la sfera sono due circonferenze rispettivamente di raggio $R_C = \overline{KL}$ e $R_S = \overline{DE}$. La somma delle aree delle sezioni è quindi $S = \pi \cdot R_C^2 + \pi \cdot R_S^2$.

Calcoliamo ora i due raggi:

- Raggio R_C

I triangoli AKL e AHC sono simili essendo entrambi rettangoli con un angolo in comune per cui vale la seguente proporzione tra lati omologhi: $\overline{AK} : \overline{KL} = \overline{AH} : \overline{HC}$ da cui

$$\overline{KL} = \frac{\overline{AK} \cdot \overline{HC}}{\overline{AH}} = \frac{(2r-x) \cdot r}{2r} = \left(r - \frac{x}{2}\right) \text{ per cui l'area della}$$

$$\text{circonferenza di raggio } \overline{KL} = \left(r - \frac{x}{2}\right) \text{ è } A_C = \pi \cdot R_C^2 = \pi \cdot \left(r - \frac{x}{2}\right)^2;$$

- Raggio R_s

Il triangolo ODE è rettangolo per cui

$$R_s = \overline{DE} = \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{2rx - x^2} \text{ per cui l'area}$$

$$\text{della circonferenza di raggio } R_s = \overline{DE} = \sqrt{2rx - x^2} \text{ è}$$

$$A_s = \pi \cdot R_s^2 = \pi \cdot (2rx - x^2).$$

La somma delle aree è quindi

$$S(x) = \pi \cdot \left(r - \frac{x}{2}\right)^2 + \pi \cdot (2rx - x^2) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + rx + r^2\right) \text{ con}$$

$0 < x < 2r$. Notiamo che la funzione $S(x)$ è una parabola con concavità verso il basso che presenta il massimo nell'ascissa del vertice

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{r}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}r; \text{ quindi la somma delle due aree è massima}$$

$$\text{per } x_v = \frac{2}{3}r \text{ e vale } S\left(\frac{2}{3}r\right) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}r^2 + r \cdot \frac{2}{3}r + r^2\right) = \frac{4}{3}\pi r^2.$$

Alternativamente possiamo proseguire mediante derivazione: la

$$\text{derivata prima della funzione } S(x) \text{ è } S'(x) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{2}x + r\right) \text{ per cui}$$

$$S'(x) > 0 \rightarrow x < \frac{2}{3}r \text{ da cui deduciamo che } S(x) \text{ è strettamente crescente}$$

$$\text{in } \left(0, \frac{2}{3}r\right) \text{ e strettamente decrescente in } \left(\frac{2}{3}r, 2r\right); \text{ inoltre}$$

$$S''(x) = -\frac{3}{2}\pi < 0 \text{ per cui } x = \frac{2}{3}r \text{ è l'ascissa del massimo.}$$

Quesito 9

Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

Gli zeri dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sono

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \text{ la derivata prima di}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ è } f'(x) = 2ax + b \text{ per cui}$$

$$f'(x_1) = 2a \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$f'(x_2) = 2a \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + b = +\sqrt{b^2 - 4ac}$$

da cui deduciamo che $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

Per dare un'interpretazione geometrica al risultato ottenuto riscriviamo la somma $[f'(x_1) + f'(x_2)]$: essa è pari a

$$f'(x_1) + f'(x_2) = (2ax_1 + b) + (2ax_2 + b) = 2a(x_1 + x_2) + 2b \text{ e imponendo}$$

che sia nulla otteniamo $(x_1 + x_2) = -\frac{b}{a}$ o equivalentemente

$$\frac{(x_1 + x_2)}{2} = -\frac{b}{2a}. \text{ La relazione appena ricavata ci dice che la}$$

semisomma delle soluzioni è pari a $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ che è l'ascissa del vertice;

in altri termini gli zeri della parabola sono simmetrici rispetto alla retta

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ coincidente con l'asse di simmetria della parabola.}$$

Quesito 10

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,
nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a, b]$ è $V_M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Nel caso in esame $V_M = \int_1^2 \left[\frac{e^x(x-1)}{x^2} \right] dx$; applicando l'integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} V_M &= \int_1^2 \left[\frac{e^x(x-1)}{x^2} \right] dx = \left[-\frac{e^x(x-1)}{x} \right]_1^2 + \int_1^2 \left[\frac{1}{x} \cdot (x \cdot e^x + e^x - e^x) \right] dx = \\ &= -\frac{e^2}{2} + \int_1^2 e^x dx = -\frac{e^2}{2} + e^2 - e = \frac{e^2}{2} - e = \frac{e^2 - 2e}{2} \end{aligned}$$