

PROBLEMA 1

Sia λ la parabola d'equazione $f(x) = 1 + x^2$

a) Sia F il fuoco di λ e r la sua direttrice, Si determinino le coordinate di F e l'equazione di r

b) Siano A e B i punti di λ di ordinata 5 e S il segmento parabolico di base AB . Si determini la retta $y = k$ che dimezza l'area di S

c) Si determini il volume del solido generato dalla rotazione di S intorno all'asse x

d) Si calcoli $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$ e lo si interpreti geometricamente.

RISOLUZIONE

Punto 1

La parabola di equazione $y = x^2 + 1$ ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate, vertice in $V(0,1)$, fuoco di coordinate

$F\left(0, \frac{1+\Delta}{4a}\right)$ cioè $F\left(0, \frac{5}{4}\right)$, direttrice di equazione $y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{3}{4}$.

Punto 2

La retta $y = 5$ interseca l'asse delle ordinate in $C(0,5)$.

Le ascisse dei punti A e B si calcolano risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \\ B \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \end{cases}.$$

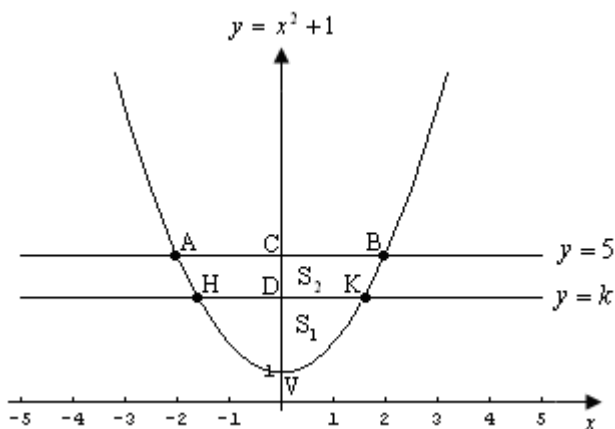
L'area di S è pari a $A(S) = \int_{-2}^2 [5 - (x^2 + 1)] dx$.

Integrando si ha

$$A(S) = 2 \cdot \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \cdot \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2 \cdot \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3}.$$

Alternativamente, applicando il teorema di Archimede, l'area del segmento parabolico è pari ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto; il rettangolo circoscritto ha area pari a $\overline{AB} \cdot \overline{VC} = 4 \cdot 4 = 16$, per cui il segmento parabolico avrà area $\frac{32}{3}$.

Sia $y = k$ una generica retta parallela all'asse delle ascisse che interseca il segmento parabolico nei punti $H(-\sqrt{k-1}, k)$, $K(\sqrt{k-1}, k)$ con $1 < k < 5$ e che suddivide il segmento parabolico in S_1 ed S_2 . Si consideri la figura sottostante.



Sia $D(0, k)$ l'intersezione della retta $y = k$ con l'asse delle ordinate.

L'area di S_1 applicando il teorema di Archimede è pari a

$$A(S_1) = \frac{2}{3} \cdot \overline{VD} \cdot \overline{HK} = \frac{2}{3} \cdot (k-1) \cdot 2\sqrt{k-1} = \frac{4}{3} \cdot (k-1)^{\frac{3}{2}}.$$

Allo stesso modo per via integrale si ha $A(S_1) = \int_{-\sqrt{k-1}}^{\sqrt{k-1}} [k - (x^2 + 1)] dx$

Integrando si ha

$$\begin{aligned} A(S_1) &= 2 \int_0^{\sqrt{k-1}} [k - (x^2 + 1)] dx = 2 \left[(k-1)x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{k-1}} = \\ &= 2 \left[(k-1)\sqrt{k-1} - \frac{(k-1)\sqrt{k-1}}{3} \right] = \frac{4}{3}(k-1)\sqrt{k-1} = \frac{4}{3}(k-1)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Imponendo $A(S_1) = \frac{A(S)}{2} = \frac{16}{3}$ otteniamo

$$\frac{4}{3} \cdot (k-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} \rightarrow (k-1)^{\frac{3}{2}} = 4 \rightarrow (k-1) = 2^{\frac{4}{3}} \rightarrow k = 1 + 2^{\frac{4}{3}}$$

Punto 3

Il volume richiesto è

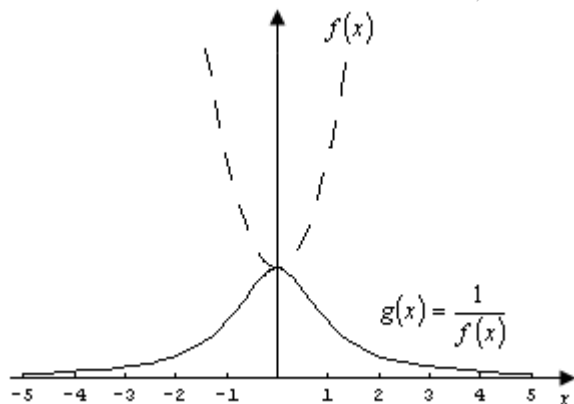
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 [5^2 - (x^2 + 1)^2] dx \xrightarrow{\text{Integrando pari}} V = 2\pi \int_0^2 (24 - x^4 - 2x^2) dx = \\ &= 2\pi \left[24x - \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = 2\pi \left(48 - \frac{32}{5} - \frac{16}{3} \right) = \frac{1088}{15}\pi \end{aligned}$$

Punto 4

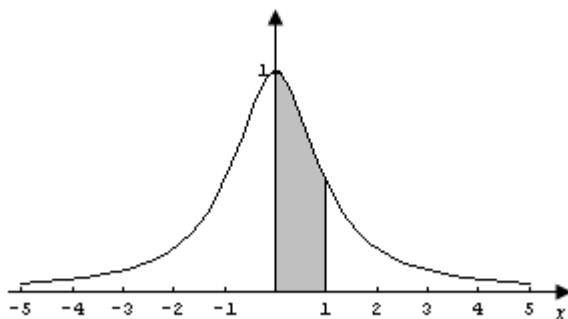
La funzione $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$ rappresenta la Versiera di Agnesi e il

suo grafico può essere costruito a partire da quello della parabola, osservando che, essendo $f(x)$ sempre positiva, continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, lo è anche $g(x)$; inoltre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ e nell'intervallo un cui

$f(x)$ è crescente $g(x)$ è decrescente e viceversa. Di seguito i due grafici in uno stesso riferimento cartesiano:



L'integrale richiesto è pari a $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ che coincide con l'area raffigurata in grigio nella figura di seguito.



PROBLEMA 2

Nel piano Oxy sono dati i punti $A(2,0)$ e $B(4,k)$, con $k \in \mathbb{R}$. Sia P il punto ottenuto dalla intersezione della retta $x = k$ con la perpendicolare per B alla retta AB .

a) Si provi che il luogo geometrico γ descritto da P al variare di k ha

equazione: $y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x}$

b) Si disegni γ

c) Si scriva l'equazione della retta r tangente a γ nei punti di ascissa 1

d) Si calcoli l'area della parte di piano delimitata da r , da γ e dalla retta $x = 2$

Punto 1

La retta AB ha coefficiente angolare $m = \frac{k}{2}$ per cui la perpendicolare alla retta AB passante per $B(4,k)$ ha equazione

$$y - k = -\frac{1}{m}(x - 4) \rightarrow y = -\frac{2}{k}(x - 4) + k. \text{ Intersecando la retta di}$$

equazione $y = -\frac{2}{k}(x - 4) + k$ con la retta $x = k$ otteniamo il luogo

$$y = -\frac{2}{k}(x - 4) + k = \frac{x^2 - 2x + 8}{x}.$$

Punto 2

Studiamo la funzione $y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x}$

Dominio: $x \neq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

Intersezione asse ascisse: non ve ne sono in quanto

$$x^2 - 2x + 8 = (x-1)^2 + 7 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

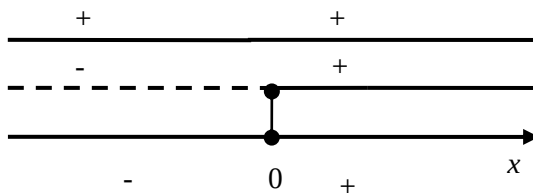
Intersezione asse ordinate: non ve ne sono perché $x = 0$ non appartiene al dominio

Positività:

$$N : x^2 - 2x + 8 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D : x > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$$



Asintoti verticali:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x + 8}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2x + 8}{x} = +\infty \text{ per cui } x = 0 \text{ è asintoto}$$

verticale;

Asintoti orizzontali: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 8}{x} = \pm\infty$ per cui non esistono asintoti

orizzontali;

Asintoti obliqui: trattandosi di funzione razionale fratta con grado del numeratore pari al grado del denominatore più 1, l'assenza dell'asintoto orizzontale implica la presenza di quello obliquo; esso ha equazione

$y = mx + q$ con

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 8}{x^2} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 8}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-2x + 8}{x} \right) = -2$$

quindi l'asintoto obliquo ha equazione $y = x - 2$;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è

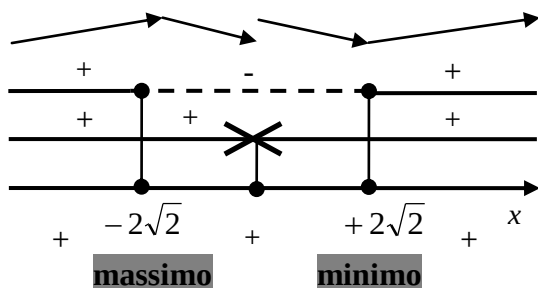
$$y' = \frac{(2x - 2) \cdot x - (x^2 - 2x + 8) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 8}{x^2} \text{ il cui quadro dei segni è}$$

rappresentato a lato;

$$N: x^2 - 8 > 0 \Rightarrow x < -2\sqrt{2} \vee x > 2\sqrt{2}$$

$$D: x^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

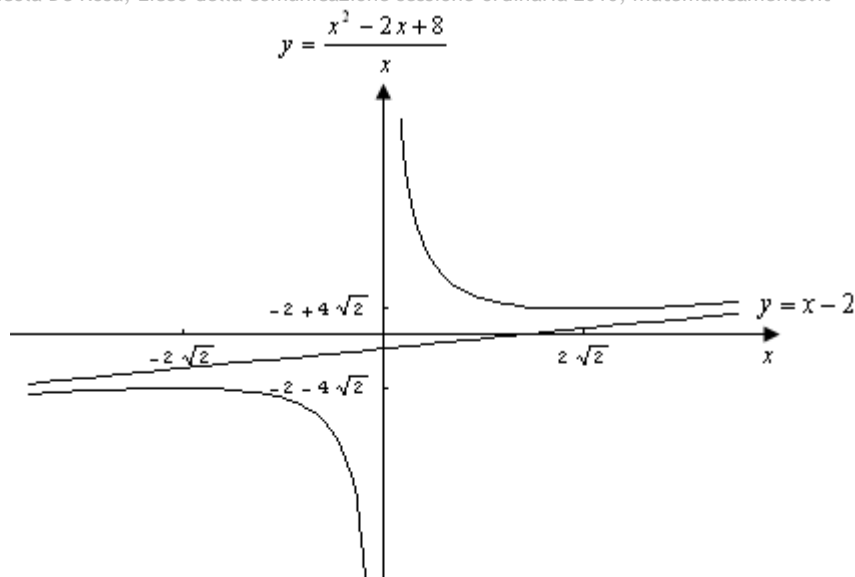
$$\frac{x^2 - 8}{x^2} > 0 \Rightarrow x < -2\sqrt{2} \vee x > 2\sqrt{2}$$



Quindi la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$ e presenta un massimo relativo nel punto $M(-2\sqrt{2}, -2 - 4\sqrt{2})$ ed un minimo relativo in $m(2\sqrt{2}, -2 + 4\sqrt{2})$;

Concavità e convessità: la derivata seconda è $y'' = \frac{16}{x^3}$ per cui la funzione presenta concavità verso l'alto in $(0, +\infty)$ e verso il basso in $(-\infty, 0)$; non esistono flessi.

Il grafico è di seguito presentato:



Alternativamente avremmo potuto trovare il grafico a partire dalla seguente considerazione: la funzione $y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x}$ può essere scritta come $y = (x - 2) + \frac{8}{x}$ da cui deduciamo che il grafico è una iperbole centro $(0, -2)$, di asintoto verticale $x = 0$ ed asintoto obliquo $y = x - 2$.

Punto 3

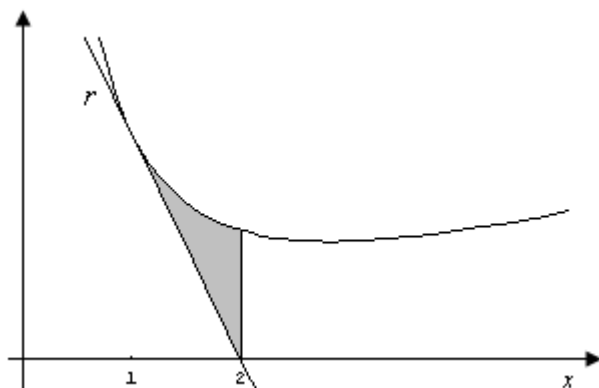
Il punto ad ascissa unitaria è $P(1, 7)$; la derivata prima in $x = 1$ vale

$$y'(1) = \left[\frac{x^2 - 8}{x^2} \right]_{x=1} = -7, \text{ per cui la tangente alla funzione nel punto}$$

$P(1, 7)$ ha equazione $y = -7(x - 1) + 7 = -7x + 14$.

Punto 4

L'area da calcolare è rappresentata in grigio nella figura seguente:



L'area richiesta è pari a

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \int_1^2 \left[\left(\frac{x^2 - 2x + 8}{x} \right) - (-7x + 14) \right] dx = \int_1^2 \left(8x - 16 + \frac{8}{x} \right) dx = \\
 &= \left[4x^2 - 16x + 8 \ln|x| \right]_1^2 = (16 - 32 + 8 \ln 2) - (4 - 16) = 8 \ln 2 - 4
 \end{aligned}$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n . Si dimostri che la sua derivata n -esima è $p^{(n)}(x) = n! \cdot a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n .

Un generico polinomio $p(x)$ di grado n può essere scritto nel seguente modo:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ con } a_i \in R, i = 0, 1, \dots, n$$

Calcoliamo le derivate prima, seconda e così via sino all' n -esima:

$$p'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 \cdot a_2 x + a_1$$

$$p''(x) = n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-2} + (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 2 \cdot a_2$$

$$p'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_{n-1} x^{n-4} + \dots + 6 \cdot a_3$$

$\vdots$

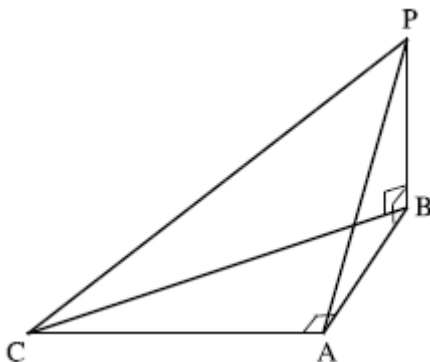
$$p^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n = n! \cdot a_n$$

Quesito 2

Siano ABC un triangolo rettangolo in A , r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B . Si dimostri che i tre triangoli PAB , PBC , PCA sono triangoli rettangoli.

Consideriamo la figura a lato rappresentante la geometria del problema.

Poiché la retta PB è ortogonale al piano del triangolo, essa è ortogonale a tutte le rette del piano passanti per B , quindi è ortogonale a BA e BC , da cui deduciamo che i triangoli PBC e PBA



sono entrambi rettangoli in B. Ci resta da dimostrare che anche PAC è rettangolo; in particolare vogliamo dimostrare che PAC è rettangolo in A. Ciò è vero se, applicando il teorema di Pitagora, si ha

$$\overline{PC}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AC}^2.$$

Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli PBA, PBC ed ABC otteniamo:

$$\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{AB}^2 \quad (1)$$

$$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 \quad (2)$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \quad (3)$$

Sostituendo le espressioni (1) e (3) in (2) si ha:

$$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 = (\overline{PA}^2 - \overline{AB}^2) + (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) = \overline{PA}^2 + \overline{AC}^2 \text{ cioè il triangolo PAC è rettangolo in A.}$$

Quesito 3

Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?

La pendenza della retta tangente in x a una funzione $f(x)$ è la derivata prima di $f(x)$. Nel caso in esame la derivata prima di $f(x) = e^{3x} + 1$ è $f'(x) = 3e^{3x}$, per cui imponendo $f'(x) = 3e^{3x} = 2$ si ricava

$$e^{3x} = \frac{2}{3} \rightarrow 3x = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow x = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right).$$

$$\text{Per } x = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) \text{ si ha } f\left(\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)\right) = e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Quindi $f(x) = e^{3x} + 1$ ha tangente in $\left(\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right), \frac{5}{3}\right)$ con pendenza 2.

Quesito 4

Si calcoli: $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \sin \frac{1}{x}$

Effettuiamo il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$; se $x \rightarrow \infty$ $y \rightarrow 0$, per cui

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \sin \frac{1}{x} = 4 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 4$$

in cui si è sfruttato il limite notevole $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

Quesito 5

Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

Consideriamo la figura a lato in cui è rappresentato in sezione un cono di apotema $a = 80 \text{ cm}$, altezza h e raggio di base r .

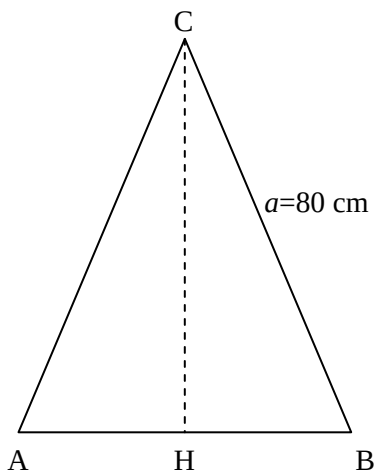
Poniamo $\overline{CH} = x$, $0 < x < 80$. Il raggio di base per il teorema di Pitagora misura

$$\overline{HB} = r = \sqrt{6400 - x^2}.$$

Il volume del cono è

$$V(x) = \frac{\pi h r^2}{3} = \frac{\pi}{3} x (6400 - x^2).$$

Massimizziamo il volume ricorrendo al calcolo differenziale.



$$V'(x) = \frac{\pi}{3} (6400 - 3x^2)$$

$$V'(x) > 0 \rightarrow 0 < x < \frac{80\sqrt{3}}{3}$$

$$V'(x) < 0 \rightarrow \frac{80\sqrt{3}}{3} < x < 80$$

quindi il volume è

strettamente crescente in $\left(0, \frac{80\sqrt{3}}{3}\right)$

strettamente decrescente in $\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}, 80\right)$.

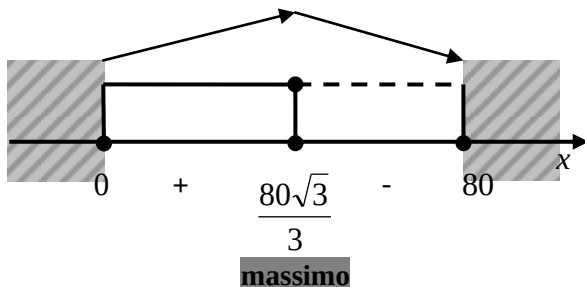
$$\text{Inoltre } V''(x) = -2\pi x \text{ e } V''\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{160\pi\sqrt{3}}{3} < 0$$

per cui il volume è massimo per $x = \frac{80\sqrt{3}}{3}$ e vale

$$\begin{aligned} V_{MAX} &= V\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \frac{80\sqrt{3}}{3} \left(6400 - \frac{6400}{3}\right) = \frac{1024000\sqrt{3}}{27} \pi \text{ cm}^3 = \\ &= \frac{1024\sqrt{3}}{27} \pi \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Ricordando che 1 litro è uguale a 1 dm³, il volume massimo in litri è

$$V_{MAX} = \frac{1024\sqrt{3}}{27} \pi \text{ litri} \cong 206,4 \text{ litri.}$$



Quesito 6

1. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$

Il dominio di $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ è l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano la disequazione $\cos(x) \geq 0$, cioè $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Quesito 7

Per quale o quali valori di k la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$

è continua in $x = 4$?

Affinché la funzione $h(x)$ sia continua in $x = 4$ deve aversi

$\lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} h(x)$. Per il caso in esame i limiti sinistro e destro

valgono rispettivamente:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (3x^2 - 11x - 4) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (kx^2 - 2x - 1) = 16k - 9$$

Imponendone l'uguaglianza si ha $16k - 9 = 0 \Rightarrow k = \frac{9}{16}$.

In $x = 4$ la funzione è tuttavia non derivabile e presenta un punto angoloso in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (6x - 11) = 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{9}{8}x - 2 \right) = \frac{5}{2}$$

Quesito 8

Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?

Una progressione aritmetica è una successione di numeri tali che la differenza tra ciascun termine e il suo precedente sia una costante. Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

I tre numeri $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica se

$$\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-3} \rightarrow \binom{n}{n-3} - 2\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} = 0.$$

Esplicitiamo i singoli coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{n-3} = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 6} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$$

Si ha quindi:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} - 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} - n \cdot (n-1) + n = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} - n \cdot (n-2) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{n \cdot (n-2)}{6} (n-1-6) = \frac{n \cdot (n-2) \cdot (n-7)}{6} = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 0 < 3 \text{ non acc.} \\ n = 2 < 3 \text{ non acc.} \\ n = 7 > 3 \text{ acc.} \end{cases}$$

In conclusione il valore accettabile è $n = 7$ cui corrispondono i tre valori $\binom{7}{6} = 7, \binom{7}{5} = 21, \binom{7}{4} = 35$.

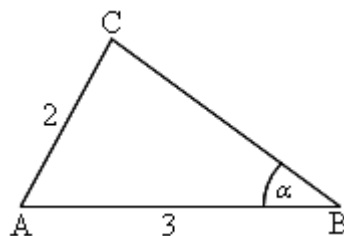
Quesito 9

Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3, AC = 2$ e $\hat{A}BC = 45^\circ$. Si provi altresì che se $AB = 3, AC = 2$ e $\hat{A}BC = 30^\circ$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

Consideriamo la figura a lato, rappresentante il triangolo

ABC con $\overline{AC} = 2, \overline{AB} = 3, \hat{A}BC = \alpha$ e consideriamo i casi corrispondenti ad $\alpha = 45^\circ$ ed $\alpha = 30^\circ$.

- $\alpha = 45^\circ$



Applicando il teorema dei seni si ha:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\hat{A}CB)} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha)} \rightarrow \sin(\hat{A}CB) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \sin(\alpha) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Poiché $\frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$, un triangolo con $\overline{AC} = 2, \overline{AB} = 3, \hat{A}BC = 45^\circ$ non esiste.

- $\alpha = 30^\circ$

Applicando ancora una volta il teorema dei seni si ricava

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\hat{A}CB)} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha)} \rightarrow \sin(\hat{A}CB) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \sin(\alpha) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{A}CB = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \cong 48,6^\circ \vee \hat{A}CB = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \cong 131,4^\circ$$

In tal caso esistono due triangoli che soddisfano le condizioni $\overline{AC} = 2, \overline{AB} = 3, \hat{A}BC = 30^\circ$.

Per calcolare la misura del terzo lato si può procedere in due modi distinti:

- Teorema dei seni

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha)} &= \frac{\overline{BC}}{\sin(\hat{CAB})} \rightarrow \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin(\hat{CAB})}{\sin(\alpha)} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin(150^\circ - \hat{ACB})}{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \cdot \overline{AC} \cdot \sin(150^\circ - \hat{ACB}) = 4 \left[\sin 150^\circ \cos(\hat{ACB}) - \cos(150^\circ) \sin(\hat{ACB}) \right] = \\ &= 4 \left[\frac{\cos(\hat{ACB})}{2} + \frac{\sqrt{3} \sin(\hat{ACB})}{2} \right] = 4 \left[\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2(\hat{ACB})}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin(\hat{ACB})}{2} \right] = \\ &= 4 \cdot \left(\frac{\pm \sqrt{1 - \frac{9}{16}}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}}{2} \right) = 4 \cdot \left(\pm \frac{\sqrt{7}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{(3\sqrt{3} \pm \sqrt{7})}{2} \end{aligned}$$

- Teorema di Carnot

Posto $\overline{BC} = x$ si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + x^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot x \cdot \cos(\alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 = 9 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 3\sqrt{3} \cdot x + 5 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \overline{BC} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$$

Quesito 10

Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenta la risposta.

Anna ha due figli F_1 ed F_2 e sappiamo per certo che almeno uno dei due è femmina. Si possono presentare quindi 3 casi possibili:

1. F_1 maschio ed F_2 femmina
2. F_1 femmina ed F_2 maschio
3. F_1 femmina ed F_2 femmina

Ricordando la definizione frequentista della probabilità come rapporto tra casi favorevoli sui totali, la probabilità di avere due figlie femmine è pari a $p = \frac{1}{3}$.

Il quesito può essere risolto alternativamente nel seguente modo. Indichiamo con X la variabile aleatoria indicante il numero di figlie femmine della signora Anna e indichiamo con p la probabilità che un figlio sia di sesso femminile. Il quesito ci chiede di calcolare la probabilità che Anna abbia due figlie femmine sapendo che la prima è femmina, cioè $P(X = 2 | X \geq 1)$.

In particolare le probabilità che il numero di figlie femmine sia pari a 0, 1 o 2 sono:

$$P(X = 0) = (1 - p)^2,$$

$$P(X = 2) = p^2,$$

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = 1 - (1 - p)^2 - p^2 = 2p(1 - p)$$

La probabilità richiesta è quindi

$$\begin{aligned}P(X = 2 | X \geq 1) &= \frac{P(X = 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 2)}{P(X = 1) + P(X = 2)} = \\&= \frac{p^2}{2p(1-p) + p^2} = \frac{p}{2-p}\end{aligned}$$

e se assumiamo uguale probabilità per i due sessi si ha

$$P(X = 2 | X \geq 1) = \frac{p}{2-p} = \frac{\frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$