PROBLEMA 1

In un triangolo ABC, l'angolo $\hat{B}$ è doppio dell'angolo $\hat{C}$ e inoltre è $BC = a$.

1. Dette BH e CL, rispettivamente, le altezze del triangolo uscenti dai vertici B e C, si consideri il rapporto:

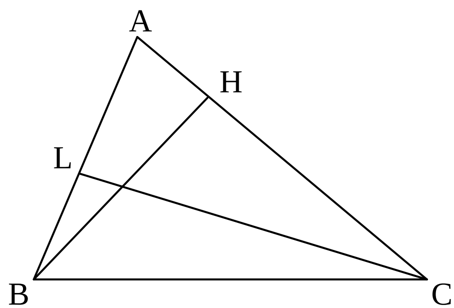
$$\frac{\overline{BH}^2 + \overline{CL}^2}{a^2}$$

espresso in funzione di $x = A\hat{B}C$.

2. Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$, mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si dimostri che γ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
4. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $0 \le x \le \pi$.

RISOLUZIONE

Punto 1



Consideriamo la figura a lato.

Posto $A\hat{B}C = x, A\hat{C}B = \frac{x}{2}$, si ha:

$$\overline{BH}^2 = a^2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\overline{CL}^2 = a^2 \cdot \sin^2(x)$$

$$f(x)=\frac{\overline{\mathrm{BH}}^2+\overline{\mathrm{CL}}^2}{a^2}=\overbrace{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}^{=\frac{1-\cos(x)}{2}}+\sin^2(x)=\frac{1-\cos(x)}{2}+1-\cos^2(x)=$$

$$=-\cos^2(x)-\frac{\cos(x)}{2}+\frac{3}{2}=\frac{-2\cos^2(x)-\cos(x)+3}{2}=\frac{(1-\cos(x))\cdot(2\cos(x)+3)}{2}$$

Punto 2

Studiamo la funzione $f(x)=\frac{(1-\cos(x))\cdot(2\cos(x)+3)}{2}$ in $[0,2\pi]$

Dominio: $[0,2\pi]$;

Intersezione asse ascisse: $f(x)=0 \rightarrow \frac{(1-\cos(x))\cdot(2\cos(x)+3)}{2}=0$

Tenendo conto che

$2\cos(x)+3>0 \quad \forall x\in[0,2\pi]$

$\cos(x)=1 \rightarrow x=0 \vee x=2\pi$

Intersezione asse ordinate: $x=0 \rightarrow f(0)=0$

Simmetrie: la funzione è periodica di periodo $T=2\pi$ e pari in quanto

$$f(-x)=\frac{(1-\cos(-x))\cdot(2\cos(-x)+3)}{2}=\frac{(1-\cos(x))\cdot(2\cos(x)+3)}{2}=f(x)$$

Positività: $f(x)>0 \rightarrow 1-\cos(x)>0 \rightarrow \cos(x)<1 \rightarrow \forall x\in(0,2\pi)$;

Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;

Asintoti orizzontali: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;

Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è

$$f'(x)=2\sin(x)\cos(x)+\frac{\sin(x)}{2}=2\sin(x)\cdot\left[\cos(x)+\frac{1}{4}\right];$$ studiamo il segno dei singoli fattori e poi valutiamo il segno della derivata prima:

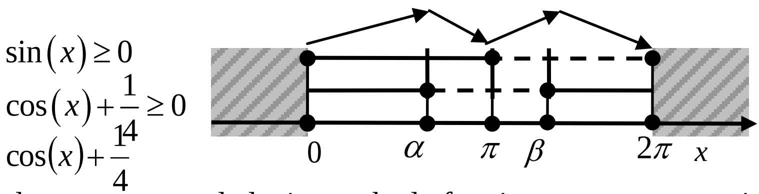
$$\sin(x)>0\Rightarrow 0<x<\pi$$

$$\cos(x)>-\frac{1}{4}\Rightarrow 0<x<\pi-\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\vee\pi+\arccos\left(\frac{1}{4}\right)<x<2\pi$$

Di conseguenza:

$$f'(x)>0\Rightarrow 0<x<\pi-\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\vee\pi<x<\pi+\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

Nel quadro dei segni $\alpha=\pi-\arccos\left(\frac{1}{4}\right),\quad\beta=\pi+\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$



Dal quadro soprastante deduciamo che la funzione presenta un minimo relativo in $m=(\pi,1)$ e due massimi relativi in

$$M_1=\left(\alpha,\frac{25}{16}\right),M_2=\left(\beta,\frac{25}{16}\right);$$

Concavità e convessità: la derivata seconda è

$$f''(x)=2\cos(2x)+\frac{\cos(x)}{2}=4\cos^2(x)+\frac{\cos(x)}{2}-2=\frac{8\cos^2(x)+\cos(x)-4}{2}$$

per cui

$$f''(x)>0 \to \cos(x)<\frac{-1-\sqrt{33}}{8} \quad \vee \quad \cos(x)>\frac{-1+\sqrt{33}}{8} \to$$

$$0<x<\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right) \quad \vee$$

$$\pi-\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)<x<\pi+\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \quad \vee$$

$$2\pi-\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)<x<2\pi$$

Quindi la funzione presenta concavità verso l'alto in

$$\left(0, \arccos\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)\cup$$

$$\left(\pi-\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}, \pi+\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\cup$$

$$\left(2\pi-\arccos\frac{-1+\sqrt{33}}{8}, 2\pi\right)$$

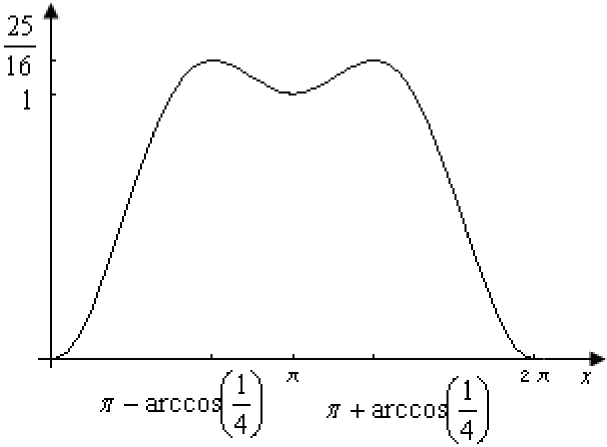
e presenta quattro flessi a tangente obliqua in

$$x=\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)\cong 53{,}6°, x=\pi-\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\cong 147{,}5°,$$

$$x=\pi+\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\cong 212{,}5°, x=2\pi-\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)\cong 306{,}4°$$

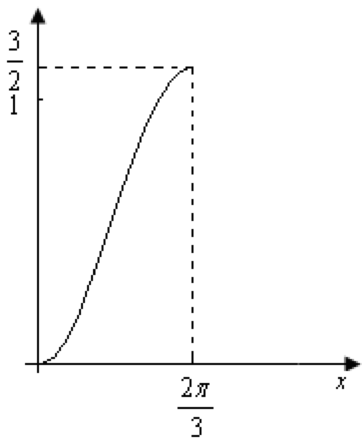
Il grafico è di seguito presentato nell'intervallo $[0,2\pi]$:

$$f(x)=\frac{(1-\cos(x))\cdot(2\cos(x)+3)}{2}$$



Se consideriamo i limiti geometrici, dobbiamo imporre che l’angolo al vertice $B\hat{A}C=\pi-\frac{3}{2}x$ deve essere compreso tra 0 e π, cioè $0<\pi-\frac{3}{2}x<\pi \rightarrow 0<x<\frac{2\pi}{3}$. Di seguito il grafico per $0<x<\frac{2\pi}{3}$:

$$f(x)=\frac{(1-\cos(x))\cdot(2\cos(x)+3)}{2}$$



Punto 3

Una funzione è simmetrica rispetto alla retta $x = k$ se $f(x) = f(2k - x)$

Nel caso in esame

$$f(2\pi - x) = \frac{[1 - \cos(2\pi - x)] \cdot [2\cos(2\pi - x) + 3]}{2} =$$

$$= \frac{(1 - \cos x) \cdot (2\cos x + 3)}{2} = f(x)$$

per cui $f(x)$ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

Punto 4

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a, b]$ è $V_M = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$.

Nel caso in esame

$$V_M = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[-\cos^2(x) - \frac{\cos(x)}{2} + \frac{3}{2} \right] dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[-\left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right) - \frac{\cos(x)}{2} + \frac{3}{2} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[-\frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2} + 1 \right] dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\sin(2x)}{4} - \frac{\sin(x)}{2} + x \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$$

PROBLEMA 2

Sia data la funzione:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$$

1. Si verifichi che la curva che la rappresenta è simmetrica rispetto all'origine.
2. Si studi tale funzione e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*.
3. Si verifichi che $F(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log\left|x^2-1\right|$ è una funzione primitiva di $f(x)$.
4. Si calcoli l'errore che si commette approssimando l'area racchiusa dalla curva γ, dall'asse *x* e dalle rette $x=2$ e $x=3$ con l'area del trapezio *ABCD*, essendo $A(2,0), B(3,0), C(3, f(3))$ e $D(2, f(2))$.

Punto 1

Per dimostrare la simmetria rispetto all'origine bisogna provare che $f(x)=-f(-x)$. In effetti

$$-f(-x)=-\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\frac{-x^3}{x^2-1}=\frac{x^3}{x^2-1}=f(x).$$

Punto 2

Studiamo la funzione $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

Dominio: $x\neq\pm1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;

Intersezione asse ascisse: $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}=0\rightarrow x=0$

Intersezione asse ordinate: $x=0\rightarrow f(0)=0$

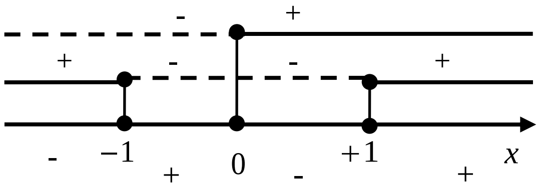
Simmetrie: la funzione è dispari come dimostrato al Punto 1

Positività:

$x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$

$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$

$f(x) > 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \vee x > 1$



Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$$

per cui le rette di equazione $x = \pm 1$ sono asintoti verticali;

Asintoti orizzontali: non esistono in quanto $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$;

Asintoti obliqui: se esistono hanno equazione $y = mx + q$ con

$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right], q = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx\right]$; nel caso in esame

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^3 - x}\right) = 1, q = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = 0$$

per cui l'asintoto obliquo ha equazione $y = x$;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è

$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$; studiamo il segno dei singoli fattori e poi valutiamo il segno della derivata prima:

$x^2 > 0 \Rightarrow x \in R - \{0\}$

$x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$

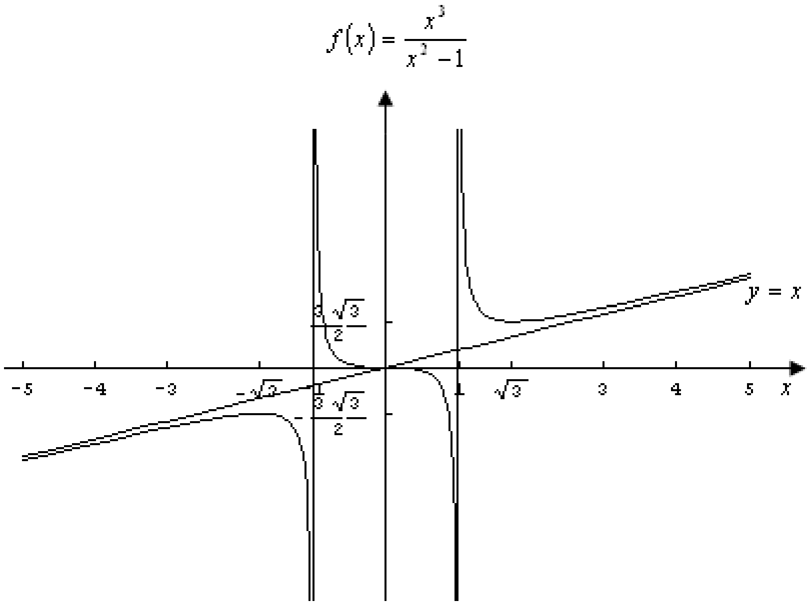
$(x^2-1)^2 > 0 \Rightarrow x \in R - \{\pm 1\}$

Di conseguenza: $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ per cui c'è un massimo in $M\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ed un minimo in $m\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$;

Concavità e convessità: la derivata seconda è

$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)\cdot(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)\cdot 4x\cdot(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ per

cui, la funzione presenta concavità verso l'alto in $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ e verso il basso in $(-\infty,-1)\cup(0,1)$; la funzione presenta un flesso a tangente orizzontale in $F=(0,0)$.
Di seguito il grafico:



Punto 3

Le primitive della funzione $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ sono

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}dx=\int\left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx=\int\left(x+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+c$$

e una di esse la ricaviamo per $c=0$ ed è $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|$

Punto 4

L'area della regione racchiusa dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette $x = 2$ e $x = 3$ è pari a:

$$S = \int_2^3 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| \right]_2^3 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\ln 8 - 2 - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$$

L'area del trapezio rettangolo è, invece, pari a

$$S_T = \frac{(B_m + B_M)\cdot h}{2} = \frac{[f(2) + f(3)]\cdot(3-2)}{2} = \frac{\left(\frac{8}{3} + \frac{27}{8}\right)}{2} = \frac{145}{48}.$$

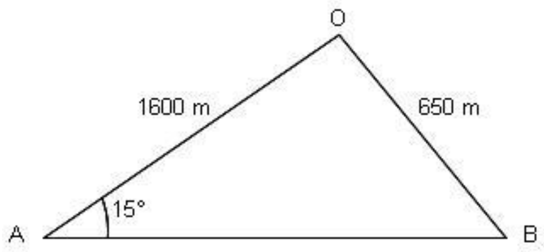
L'errore commesso rispetto al valore non approssimato è

$$\varepsilon = \frac{\frac{145}{48} - \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}\right)}{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}} = \frac{\frac{25}{48} - \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}}{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}} \cong 1,02\%$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Due osservatori si trovano ai lati opposti di un grattacielo, a livello del suolo. La cima dell'edificio dista 1600 metri dal primo osservatore, che la vede con un angolo di elevazione di 15°. Se il secondo individuo si trova a 650 metri dalla cima del grattacielo, quale è la distanza tra i due osservatori (non tenendo conto dell'ostacolo grattacielo)?



Si consideri la figura a lato che è una rappresentazione geometrica del problema. Bisogna calcolare la distanza $\overline{AB}$. Posto $\overline{AB} = x$ ed applicando il teorema di Carnot al triangolo AOB si ha $\overline{AB}^2 + \overline{AO}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AO} \cdot \cos(O\hat{A}B) = \overline{OB}^2$; sostituendo i valori l'equazione diventa

$$x^2 + 1600^2 - 2 \cdot x \cdot 1600 \cdot \cos 15° = 650^2 \rightarrow$$

$$x^2 - 3200x \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \left(1600^2 - 650^2\right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 800x\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + 2137500 = 0 \rightarrow$$

$$x = 400\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \pm \sqrt{160000\left(8-4\sqrt{3}\right) - 2137500} \rightarrow$$

$$x = 400\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \pm \sqrt{2500\left(256\sqrt{3}-343\right)} \rightarrow$$

$$x = 400\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \pm 50\sqrt{256\sqrt{3}-343} \rightarrow$$

$$x = 50\left(8\sqrt{6}+8\sqrt{2} \pm \sqrt{256\sqrt{3}-343}\right) \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_+ = 2046,49 \text{ m} \\ x_- = 1044,47 \text{ m} \end{array} \right.$$

Poiché i due osservatori si trovano ai lati opposti del grattacielo, la soluzione accettabile è $\overline{\mathrm{AB}} = 2046{,}49\ \mathrm{m}$.

Quesito 2

Si calcoli il limite della funzione $(1+tgx)^{ctgx}$ quando x tende a 0.

Posto $\tan x = \frac{1}{t}$, se $x \to 0$ allora $t \to \infty$, per cui il limite sarà:

$$\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot anx} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

Quesito 3

In quanti modi 10 persone possono disporsi su dieci sedili allineati? E attorno ad un tavolo circolare?

È un problema classico del calcolo combinatorio. Nei tanti modi in cui le persone possono sedersi conta l'ordine, quindi stiamo parlando di disposizioni. Poiché devo fare gruppi ordinati di 10 persone, disponendo proprio 10 persone stiamo parlando di permutazioni. La soluzione è data da

$$D_{10,10} = 10! = 10\cdot 9\cdot 8\cdot\cdots\cdots 2\cdot 1 = 3628800$$

Consideriamo ora il caso in cui debbano sedersi in cerchio. Per ciascuno dei modi sedersi esistono altri nove modi del tutto equivalenti ottenuti ruotando tutti i posti allo stesso modo. In sostanza i possibili modi possono essere raggruppati a 10 a 10 quindi i possibili modi di sedersi in cerchio sono

$$\frac{D_{10,10}}{10} = \frac{10!}{10} = 9! = 9\cdot 8\cdot\cdots\cdots 2\cdot 1 = 362880$$

Quesito 4

Si dimostri che ogni funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dove a, b, c, d sono valori reali con a $\neq 0$, ha un massimo e un minimo relativi oppure non ha estremanti.

La cubica di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ha come derivata prima la parabola $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

L'equazione $y' = 0$ presenta le seguenti soluzioni:

2 soluzioni reali distinte $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ se $\Delta = b^2 - 3ac > 0$;

2 soluzioni reali coincidenti $x_{1,2} = -\dfrac{b}{3a}$ se $\Delta = b^2 - 3ac = 0$;

2 sol. complesse coniugate $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-b^2 + 3ac}}{3a}$ se $\Delta < 0$.

Nel caso in cui le soluzioni sono reali e distinte, la funzione è:

se $a > 0$

crescente in

$$\left(-\infty, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right) \cup \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, +\infty\right)$$

decrescente in

$$\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right)$$

se $a < 0$

decrescente in

$$\left(-\infty, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right) \cup \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, +\infty\right)$$

crescente in

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}, \frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a} \right)$$

Nel caso $a > 0$ la cubica presenta quindi

un massimo relativo all'ascissa $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$

e un minimo relativo all'ascissa $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$,

mentre se $a < 0$

un minimo relativo all'ascissa $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$

e un massimo relativo all'ascissa $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$.

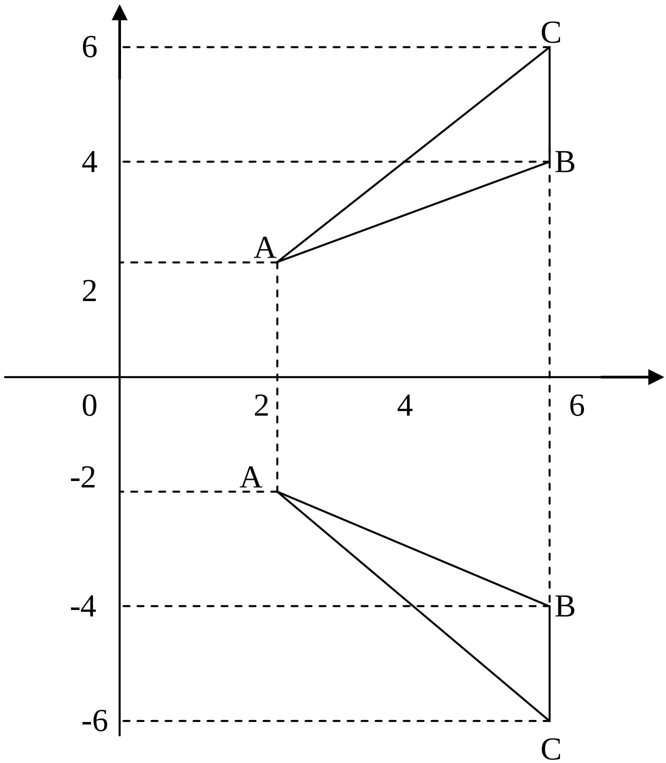
In questi casi la funzione presenterebbe, oltre ai due estremanti suddetti, anche un flesso a tangente obliqua all'ascissa $x_F = -\dfrac{b}{3a}$.

Se le due soluzioni fossero reali e coincidenti o complesse coniugate, la funzione sarebbe strettamente crescente in tutto il dominio R, per cui non vi sarebbero estremanti in questi casi; in particolare in presenza di soluzioni reali la funzione presenterebbe solo un flesso a tangente orizzontale all'ascissa $x_F = -\dfrac{b}{3a}$ mentre in presenza di soluzioni complesse coniugate la funzione presenterebbe solo un flesso a tangente obliqua all'ascissa $x_F = -\dfrac{b}{3a}$.

Quesito 5

Si calcoli il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse *x* del triangolo di vertici $A(2,2), B(6,4), C(6,6)$.

Si consideri la figura sottostante:



Il volume richiesto è dato dalla differenza tra i volumi dei tronchi di cono AA'C'C e AA'B'B:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot\left(R^2 + r^2 + Rr\right) - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot\left(R'^2 + r'^2 + R'r'\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4\cdot(36+4+12) - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4\cdot(16+4+8) = \frac{208}{3}\pi - \frac{112}{3}\pi = \frac{96}{3}\pi = 32\pi$$

Quesito 6

Si dica se esistono numeri reali per i quali vale la seguente uguaglianza:

$$2+2^x = sen^4 x+\cos^4 x+6sen^2 x\cos^2 x$$

L'equazione può essere così riscritta:

$$2+2^x = \left[\sin^4(x)+\cos^4(x)+2\sin^2(x)\cos^2(x)\right]+4\sin^2(x)\cos^2(x)=$$

$$=\left[\overbrace{\sin^2(x)+\cos^2(x)}^{=1}\right]^2+\left[\overbrace{2\sin(x)\cos(x)}^{=\sin(2x)}\right]^2=1+\sin^2(2x)\Rightarrow \sin^2(2x)=1+2^x$$

Poiché $1+2^x>1\quad \forall x\in R$, l'equazione $\sin^2(2x)=1+2^x$ non ha soluzioni in R in quanto $|\sin(2x)|\le 1$.

Quesito 7

Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t+\frac{1}{t}, t-\frac{1}{t}\right)$. Al variare di t ($t\neq 0$), P descrive un luogo geometrico del quale si chiede l'equazione cartesiana e il grafico.

Poniamo $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$.

Sommando e sottraendo membro a membro si ha: $\begin{cases} x+y=2t \\ x-y=\dfrac{2}{t} \end{cases}$

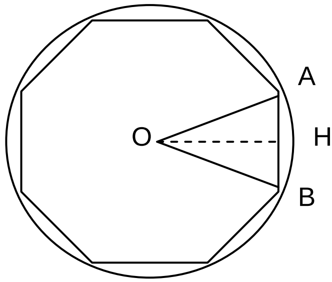
da cui, eliminando il parametro t, ricaviamo

$x+y=2\cdot\left(\dfrac{2}{x-y}\right)\Leftrightarrow x^2-y^2=4$; il luogo è, quindi, una iperbole equilatera con asintoti le bisettrici di equazione $y=\pm x$.

Quesito 8

Si dimostri che il perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r , quando si fa tendere n all'infinito, tende alla lunghezza della circonferenza.

Si consideri la figura sottostante di un poligono inscritto in una circonferenza di centro O e raggio r.



Il perimetro del poligono è pari a n volte la lunghezza del segmento AB, $2p_n = n \cdot \overline{AB}$ se i lati del poligono sono n l'angolo $A\hat{O}B$ misura $\frac{2\pi}{n}$ per cui $A\hat{O}H = B\hat{O}H = \frac{\pi}{n}$. La lunghezza del lato AB è pari al doppio di quella del segmento AH poiché AOB è isoscele per cui applicando il teorema dei triangoli rettangoli si ha $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AH} = 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Il perimetro sarà quindi $2p_n = 2rn \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Calcoliamo tale perimetro quando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} 2p_n = \lim_{n\to\infty}\left[2rn \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[2\pi r \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right] =$$

$$= 2\pi r \cdot \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right] \overset{t=\frac{\pi}{n}}{=} 2\pi r \cdot \underbrace{\lim_{t\to 0}\left[\frac{\sin(t)}{(t)}\right]}_{\to 1} = 2\pi r$$

cioè il perimetro, al tendere all'infinito del numero dei lati, tende alla lunghezza della circonferenza circoscritta ad esso.

Quesito 9

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)=\cos^3 x$ nell'intervallo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a,b]$ è $V_M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

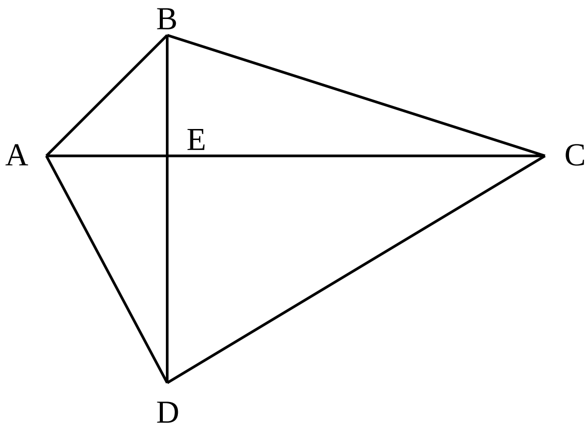
Nel caso in esame

$$V_M=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos(x)-\cos(x)\cdot\sin^2(x)\right]dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\sin(x)-\frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3\pi}$$

Quesito 10

Si dimostri che se le diagonali di un quadrilatero sono perpendicolari, la somma dei quadrati di due lati opposti è uguale alla somma dei quadrati degli altri due.



Consideriamo la figura sottostante. Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli AED, BEC, AEB e EDC si ha:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 \ (1)$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2 \ (2)$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 \ (3)$$

$$\overline{DC}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EC}^2 \ (4)$$

Sommando membro a membro le prime due e le ultime due si ha:

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{EC}^2$$

cioè la somma dei quadrati di due lati opposti coincide.