

PROBLEMA 1

Data una circonferenza di centro O e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti A, B, C , tali che $AB = BC$.

1. Si calcoli, in funzione dell'angolo $\widehat{AOB} = x$, la quantità:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2$$

controllando che risulti:

$$f(x) = -4\cos^2 x - 4\cos x + 8$$

2. Si studi la funzione $f(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$

3. Si verifichi che la curva γ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = \pi$

4. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.

RISOLUZIONE

Punto 1

Consideriamo la figura di seguito.

Posto $\widehat{AOB} = x$ si ha

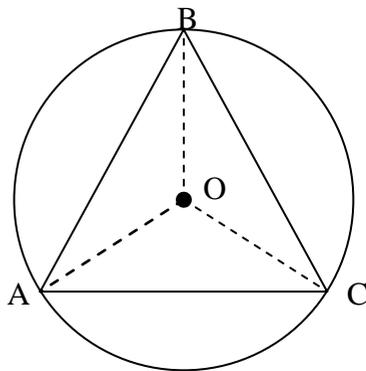
$$\widehat{ABC} = 2 \cdot \widehat{ABO} = 2 \cdot \left(\frac{\pi - x}{2} \right) = \pi - x \text{ e}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \frac{x}{2}.$$

Applicando il teorema della corda al triangolo ABC si ha:

$$\overline{AC} = 2 \cdot \sin(\pi - x) = 2 \sin(x), \overline{AB} = \overline{BC} = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Quindi:



$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 &= 4\sin^2 x + 8\sin^2 \frac{x}{2} = 4[1 - \cos^2 x] + 8\left[\frac{1 - \cos x}{2}\right] = \\ &= -4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 8 \end{aligned}$$

Punto 2

Studiamo la funzione

$$f(x) = -4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 8 = 4[\cos(x) + 2] \cdot [1 - \cos(x)] \text{ in } [0, 2\pi]$$

Dominio: $[0, 2\pi]$;

Intersezione asse ascisse:

$$f(x) = 0 \rightarrow [\cos(x) + 2] \cdot [1 - \cos(x)] = 0 \xrightarrow[\forall x \in [0, 2\pi]]{\cos(x) + 2 > 0}$$

$$\cos(x) = 1 \rightarrow x = 0 \vee x = 2\pi$$

Intersezione asse ordinate: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$

Simmetrie: la funzione è periodica di periodo $T = 2\pi$ e pari in quanto

$$f(-x) = -4\cos^2(-x) - 4\cos(-x) + 8 = -4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 8 = f(x);$$

Positività: $f(x) > 0 \rightarrow 1 - \cos(x) > 0 \rightarrow \cos(x) < 1 \rightarrow \forall x \in (0, 2\pi)$;

Asintoti verticali: nessuno perché la funzione è periodica e limitata;

Asintoti orizzontali: nessuno, la funzione è periodica e limitata;

Asintoti obliqui: nessuno, la funzione è periodica e limitata;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è

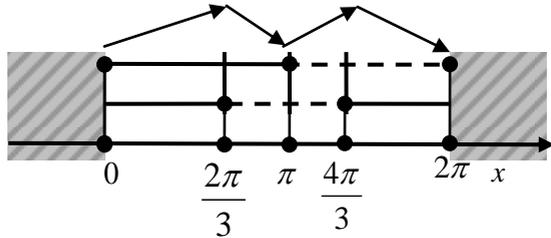
$$f'(x) = 8\sin(x)\cos(x) + 4\sin(x) = 4\sin(x) \cdot [2\cos(x) + 1]; \text{ di seguito lo studio dei segni della derivata.}$$

$$\sin(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \pi$$

$$\cos(x) > -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x < \frac{2\pi}{3} \vee \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi$$

$$\sin(x) \geq 0$$

$$2\cos(x) + 1 \geq 0$$



$$f'(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{2\pi}{3} \vee \pi < x < \frac{4\pi}{3}$$

Dal quadro soprastante deduciamo che la funzione presenta un minimo relativo in $m = (\pi, 8)$ e due massimi relativi in

$$M_1 = \left(\frac{2\pi}{3}, 9\right), M_2 = \left(\frac{4\pi}{3}, 9\right);$$

Concavità e convessità: la derivata seconda è

$$f''(x) = 4[4\cos^2(x) + \cos(x) - 2] \text{ per cui}$$

$$f''(x) > 0 \rightarrow \cos(x) < \frac{-1 - \sqrt{33}}{8} \vee \cos(x) > \frac{-1 + \sqrt{33}}{8} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 < x < \arccos\left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}\right)$$

$$\pi - \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right) < x < \pi + \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right)$$

$$2\pi - \arccos\left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}\right) < x < 2\pi$$

Quindi la funzione presenta concavità verso l'alto in

$$\left(0, \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)\right) \cup$$

$$\left(\pi - \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right), \pi + \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\right) \cup$$

$$\left(2\pi - \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right), 2\pi\right)$$

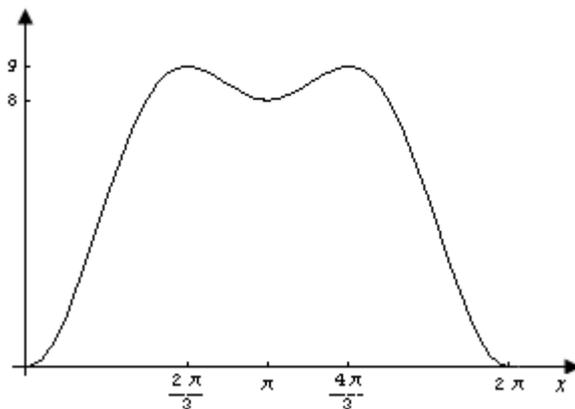
e presenta quattro flessi a tangente obliqua in

$$x = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right) \cong 53,6^\circ, x = \pi - \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \cong 147,5^\circ,$$

$$x = \pi + \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \cong 212,5^\circ, x = 2\pi - \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right) \cong 306,4^\circ$$

Il grafico è di seguito presentato:

$$f(x) = -4 \cos^3(x) - 4 \cos(x) + 8$$



Punto 3

Una funzione è simmetrica rispetto alla retta $x = k$ se

$f(x) = f(2k - x)$. Nel caso in esame

$$f(2\pi - x) = -4\cos^2(2\pi - x) - 4\cos(2\pi - x) + 8 =$$

$$= -4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 8 = f(x)$$

per cui $f(x)$ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

Punto 4

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a, b]$ è $V_M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Nel caso in esame

$$\begin{aligned} V_M &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-4\cos^2 x - 4\cos x + 8] dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[-4 \cdot \frac{1 + \cos(2x)}{2} - 4\cos x + 8 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-2\cos(2x) - 4\cos x + 6] dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} [-\sin(2x) - 4\sin x + 6x]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 12\pi = 6 \end{aligned}$$

PROBLEMA 2

Sia data la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1. Si determini il dominio di $f(x)$ e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.
2. Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ .
3. Si calcoli l'area della parte di piano \mathbb{R} racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.
4. La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S . In S si inscriba un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinché il suo volume sia massimo.

RISOLUZIONE

Punto 1

Il dominio della funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ è dato da:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Nel dominio la funzione è continua.

La derivata prima è

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ da cui}$$

deduciamo che la funzione non è derivabile nei punti $x = \pm 1$ in cui presenta una tangente verticale; infatti $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$. In

conclusione la funzione è derivabile in tutti i punti del dominio esclusi i punti con ascisse $x = \pm 1$.

Punto 2

Studiamo la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Dominio: $-1 \leq x \leq 1$;

Intersezione asse ascisse: $f(x) = x\sqrt{1-x^2} = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$

Intersezione asse ordinate: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$

Simmetrie: la funzione è dispari in quanto

$$f(-x) = -x\sqrt{1-(-x)^2} = -x\sqrt{1-x^2} = -f(x)$$

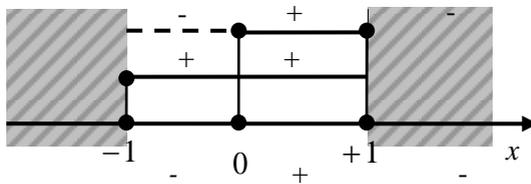
Positività:

$$x > 0$$

$1-x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$ *Asintoti verticali:* non ve ne sono in quanto

$$f(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0;$$



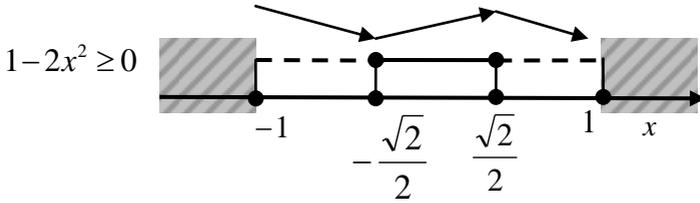
Asintoti orizzontali: non esistono visto il dominio chiuso $[-1,1]$;

Asintoti obliqui: non esistono visto il dominio chiuso $[-1,1]$;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

dal quadro dei segni deduciamo la presenza di un minimo relativo

$$m\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ ed un massimo relativo } M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right);$$



Concavità e convessità: la derivata seconda è

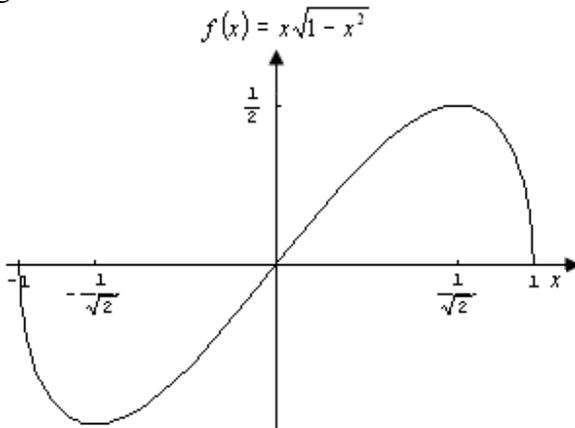
$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2)\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-4x(1-x^2) + x(1-2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^3 - 3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

per cui, ricordando che il dominio è $-1 \leq x \leq 1$, si ha

$$f''(x) > 0 \rightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3x > 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0 \vee x > \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 < x < 1 \end{cases} \rightarrow -1 < x < 0$$

cioè la funzione presenta concavità verso l'alto in $(-1,0)$ e verso il basso in $(0,1)$; la funzione presenta quindi un flesso a tangente obliqua $F = (0,0)$ con tangente inflessionale di equazione $y = x$.

Di seguito il grafico:



Punto 3

L'area richiesta è

$$S = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 -\frac{1}{2} \frac{d(1-x^2)}{dx} \sqrt{1-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Punto 4

Sia $P(x, x\sqrt{1-x^2})$ con $0 < x < 1$ un punto generico appartenente al ramo del primo quadrante della funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

Il raggio del cono inscritto sarà pari all'ordinata del punto P e cioè

$R = x\sqrt{1-x^2}$ mentre l'altezza sarà pari all'ascissa e cioè $h = x$.

Il volume del cono sarà allora

$$V(x) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 \cdot (1-x^2) \cdot x = \frac{\pi}{3} \cdot (x^3 - x^5).$$

Studiamo la derivata per trovare il massimo

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot (3x^2 - 5x^4)$$

per cui la funzione volume, ricordando la limitazione geometrica

$0 < x < 1$ è strettamente crescente in $\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ e strettamente

decrescente in $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 1\right)$ da cui deduciamo che il volume è massimo

quando l'altezza è pari a $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ ed il raggio è pari a $R = \frac{\sqrt{6}}{5}$. Il valore

massimo è pertanto pari a $V\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{9}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{2\pi}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

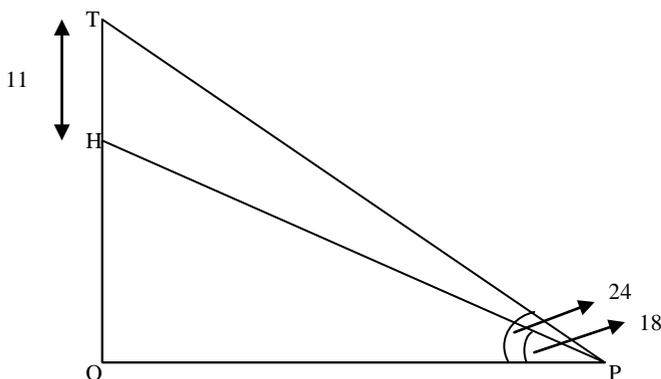
In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24° . Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

Consideriamo la figura a lato. Dobbiamo calcolare la lunghezza del segmento PO.

Applicando il teorema dei triangoli rettangoli ai triangoli POT e POH si ha la relazione

$$\overline{PO} \cdot \tan(24^\circ) - \overline{PO} \cdot \tan(18^\circ) = 11 \text{ da cui}$$

$$\overline{PO} = \frac{11}{\tan(24^\circ) - \tan(18^\circ)} \cong 91 \text{ m}$$



Quesito 2

Considerata la funzione $f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

Il limite richiesto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per cui possiamo applicare il teorema di de l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln 3 \cdot 3^{3x} - \ln a \cdot a^x}{\ln 6 \cdot 6^x - \ln 5 \cdot 5^x} = \frac{3 \ln 3 - \ln a}{\ln 6 - \ln 5} = \frac{\ln \frac{27}{a}}{\ln \frac{6}{5}}.$$

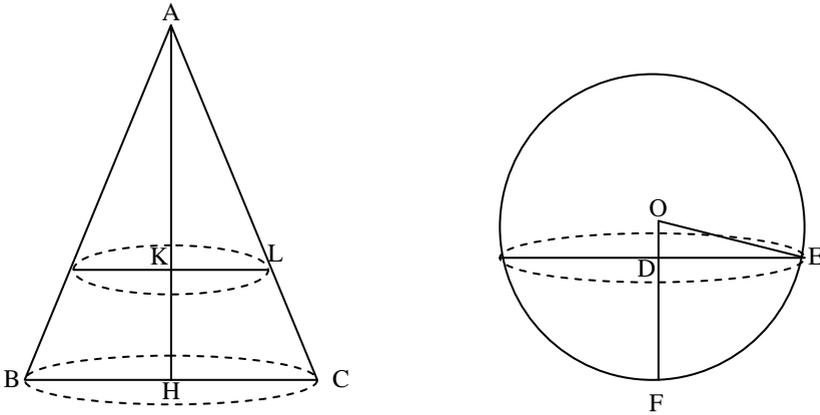
Imponendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x} = 2$ si ha

$$\frac{\ln \frac{27}{a}}{\ln \frac{6}{5}} = 2 \rightarrow \ln \frac{27}{a} = 2 \ln \frac{6}{5} \rightarrow \ln \frac{27}{a} = \ln \frac{36}{25} \rightarrow \frac{27}{a} = \frac{36}{25} \rightarrow a = \frac{75}{4}.$$

Quesito 3

Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r . A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β , perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

Si consideri la figura seguente:



Indichiamo con x , $0 < x < 2r$, la distanza tra piani α e β .
 Le intersezioni del piano β con il cono e la sfera sono due circonferenze rispettivamente di raggio $R_C = \overline{KL}$ e $R_S = \overline{DE}$. La somma delle aree delle sezioni è quindi $S = \pi \cdot R_C^2 + \pi \cdot R_S^2$.

Calcoliamo ora i due raggi:

- Raggio R_C

I triangolo AKL e AHC sono simili essendo entrambi rettangoli con un angolo in comune per cui vale la seguente proporzione tra lati omologhi: $\overline{AK} : \overline{KL} = \overline{AH} : \overline{HC}$ da cui

$$\overline{KL} = \frac{\overline{AK} \cdot \overline{HC}}{\overline{AH}} = \frac{(2r-x) \cdot r}{2r} = \left(r - \frac{x}{2}\right) \text{ per cui l'area della}$$

$$\text{circonferenza di raggio } \overline{KL} = \left(r - \frac{x}{2}\right) \text{ è } A_C = \pi \cdot R_C^2 = \pi \cdot \left(r - \frac{x}{2}\right)^2;$$

- Raggio R_S

Il triangolo ODE è rettangolo per cui

$$R_S = \overline{DE} = \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{2rx - x^2} \text{ per cui l'area}$$

della circonferenza di raggio $R_S = \overline{DE} = \sqrt{2rx - x^2}$ è

$$A_S = \pi \cdot R_S^2 = \pi \cdot (2rx - x^2).$$

La somma delle aree è quindi

$$S(x) = \pi \cdot \left(r - \frac{x}{2}\right)^2 + \pi \cdot (2rx - x^2) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + rx + r^2\right) \text{ con}$$

$0 < x < 2r$. Notiamo che la funzione $S(x)$ è una parabola con concavità verso il basso che presenta il massimo nell'ascissa del vertice

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{r}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}r; \text{ quindi la somma delle due aree è massima}$$

$$\text{per } x_v = \frac{2}{3}r \text{ e vale } S\left(\frac{2}{3}r\right) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}r^2 + r \cdot \frac{2}{3}r + r^2\right) = \frac{4}{3}\pi r^2.$$

Alternativamente possiamo proseguire mediante derivazione: la

derivata prima della funzione $S(x)$ è $S'(x) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{2}x + r\right)$ per cui

$S'(x) > 0 \rightarrow x < \frac{2}{3}r$ da cui deduciamo che $S(x)$ è strettamente crescente

in $\left(0, \frac{2}{3}r\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{2}{3}r, 2r\right)$; inoltre

$S''(x) = -\frac{3}{2}\pi < 0$ per cui $x = \frac{2}{3}r$ è l'ascissa del massimo.

Quesito 4

Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

Gli zeri dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sono

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

la derivata prima di $f(x) = ax^2 + bx + c$ è $f'(x) = 2ax + b$ per cui

$$f'(x_1) = 2a \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$f'(x_2) = 2a \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + b = +\sqrt{b^2 - 4ac}$$

da cui deduciamo che $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

Per dare un'interpretazione geometrica al risultato ottenuto riscriviamo la somma $[f'(x_1) + f'(x_2)]$: essa è pari a

$f'(x_1) + f'(x_2) = (2ax_1 + b) + (2ax_2 + b) = 2a(x_1 + x_2) + 2b$ e imponendo che sia nulla otteniamo $(x_1 + x_2) = -\frac{b}{a}$ o equivalentemente

$$\frac{(x_1 + x_2)}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

La relazione appena ricavata ci dice che la semisomma delle soluzioni è pari a $-\frac{b}{2a}$ che è l'ascissa del vertice; in altri termini gli zeri della

parabola sono simmetrici rispetto alla retta $x = -\frac{b}{2a}$ coincidente con l'asse di simmetria della parabola.

Quesito 5

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a, b]$ è $V_M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Nel caso in esame $V_M = \int_1^2 \left[\frac{e^x(x-1)}{x^2} \right] dx$; applicando l'integrazione per

parti si ha

$$\begin{aligned} V_M &= \int_1^2 \left[\frac{e^x(x-1)}{x^2} \right] dx = \left[-\frac{e^x(x-1)}{x} \right]_1^2 + \int_1^2 \left[\frac{1}{x} \cdot (x \cdot e^x + e^x - e^x) \right] dx = \\ &= -\frac{e^2}{2} + \int_1^2 e^x dx = -\frac{e^2}{2} + e^2 - e = \frac{e^2}{2} - e = \frac{e^2 - 2e}{2} \end{aligned}$$

Quesito 6

Si determinino a e b in modo tale che il grafico della funzione $y = a^{x+b}$ passi per i punti del piano xy di coordinate $(1,4)$ e $(3,8)$.

La base a della funzione potenza deve essere $a > 0 \wedge a \neq 1$. Imponendo il passaggio per i punti $(1,4), (3,8)$ si ha:

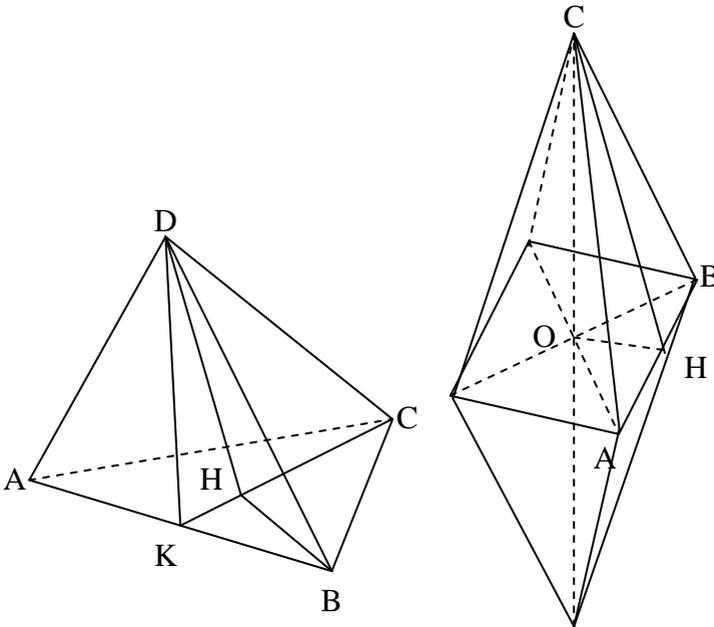
$$\begin{aligned} \begin{cases} a^{b+1} = 4 \\ a^{b+3} = 8 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} a^{b+1} = 4 \\ a^{b+1} \cdot a^2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^{b+1} = 4 \\ 4 \cdot a^2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^{b+1} = 4 \\ a^2 = 2 \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ 2^{\frac{b+1}{2}} = 2^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ \frac{b+1}{2} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

in cui la soluzione $a = -\sqrt{2}$ è stata scartata in quanto non soddisfa la condizione $a > 0 \wedge a \neq 1$.

Quesito 7

Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza l . Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.

Consideriamo il tetraedro e l'ottaedro sottostanti:



Calcoliamo i due volumi.

- Volume tetraedro

L'altezza di ognuno dei 4 triangoli equilateri componenti è $\overline{DK} = l \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ricordando che l'ortocentro di un triangolo equilatero divide ognuna delle tre altezze in due parti di cui una doppia dell'altra si ha

$$\overline{KH} = \frac{1}{3} \cdot \left(l \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = l \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ per cui l'altezza del tetraedro è pari a}$$

$$\overline{DH} = \sqrt{\overline{DK}^2 - \overline{KH}^2} = \sqrt{\left(l \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(l \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2} = l \frac{\sqrt{6}}{3};$$

$$\text{il volume è allora } V_T = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l \frac{\sqrt{6}}{3}}{3} = l^3 \frac{\sqrt{2}}{12};$$

- Volume ottaedro

Il volume dell'ottaedro può essere visto come la somma dei volumi delle due piramidi componenti. In accordo con la figura soprastante si

$$\text{ha } \overline{OH} = \frac{l}{2}, \overline{CH} = l \frac{\sqrt{3}}{2}, \overline{CO} = \sqrt{\overline{CH}^2 - \overline{OH}^2} = l \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ per cui il volume}$$

$$\text{di una delle due piramidi è } V_p = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{l^2 \cdot l \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = l^3 \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ per cui il}$$

volume dell'ottaedro è $V_O = 2V_p = l^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$ che corrisponde al quadruplo del volume del tetraedro.

Quesito 8

Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni

$$\text{parametriche } x = 2t \text{ e } y = \frac{2}{t^2 + 1} \text{ nel suo punto di coordinate } (2,1).$$

Le equazioni parametriche possono essere scritte come

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x}{2} \\ y = \frac{2}{t^2 + 1} \end{array} \right.$$

da cui deduciamo la curva $y = \frac{2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{8}{x^2 + 4}$; l'equazione della

retta tangente in $(2,1)$ è $y = m(x-2)+1$ con $m = y'(2)$; la derivata

prima della funzione $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ è $y' = -\frac{16x}{(x^2 + 4)^2}$

per cui $m = y'(2) = -\frac{1}{2}$; in conclusione l'equazione della retta tangente

è $y = -\frac{1}{2}(x-2)+1 = -\frac{x}{2} + 2$.

Quesito 9

Si dimostri che se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0 , ivi è anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.

Dimostrazione

Ipotesi: \exists finito il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Tesi: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Scriviamo: $f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$

Segue:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) =$$

$$= f(x_0) + \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

come volevasi dimostrare.

Se la derivabilità in un punto x_0 ne implica la continuità, non vale il viceversa. Basta prendere in considerazione la funzione

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \text{ che risulta essere continua ma non}$$

derivabile in $x = 0$ in cui presenta un punto angoloso in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1$$

Quesito 10

Si dimostri che la differenza dei quadrati di due lati di un triangolo è uguale alla differenza dei quadrati delle rispettive proiezioni dei lati stessi sul terzo lato del triangolo.

Consideriamo la figura a lato.

I triangoli AHB ed AHC sono rettangoli in H.

Applicando il teorema di Pitagora ad entrambi si ha:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2$$

Sottraendo membro a membro si ha:

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = (\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2) - (\overline{AH}^2 + \overline{HC}^2) = \overline{BH}^2 - \overline{HC}^2 \text{ che coincide con quanto volevamo dimostrare.}$$

