

PROBLEMA 1

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP . Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ .

1. Se $AP = x$ si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy , si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?

3. Sia $g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$, $x \in \mathbb{R}$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0,1)$? E nel punto $S(1,0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S ?

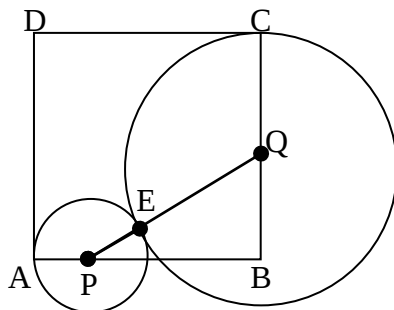
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS , ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

RISOLUZIONE

Punto 1

La figura rappresenta la geometria del problema.

Indichiamo con E il punto di contatto delle due circonferenze; il segmento PQ passerà per E . Indicando con $\overline{CQ} = \overline{QE} = y$, $0 < y < 1$, il raggio della circonferenza λ , si ha:



$$\overline{QP} = x + y \quad \overline{PB} = 1 - x \quad \overline{QB} = 1 - y$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo PQB si ha:

$$\overline{QP}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{QB}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x + y)^2 = (1 - x)^2 + (1 - y)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 1 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y \cdot (1 + x) = 2 \cdot (1 - x) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{1 - x}{1 + x}$$

Punto 2

Studiamo la funzione $y = \frac{1 - x}{1 + x}$

Dominio: $1 + x \neq 0 \rightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$;

Intersezione asse ascisse: $y = \frac{1 - x}{1 + x} = 0 \rightarrow x = 1$;

Intersezione asse ordinate: $x = 0 \rightarrow y = 1$;

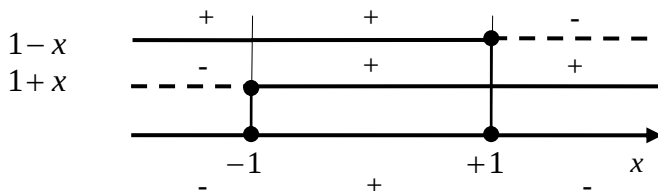
Simmetrie: la funzione è simmetrica rispetto alla retta $y = x$ cosa che è dimostrata anche per via algebrica dall'equazione

$$(x + y)^2 = (1 - x)^2 + (1 - y)^2;$$

Positività:

$$N: 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$$

$$D: 1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$$



$$y = \frac{1-x}{1+x} > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

Asintoti verticali: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ per cui

$x = -1$ è asintoto verticale;

Asintoti orizzontali: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$ per cui $y = -1$ è asintoto

orizzontale;

Asintoti obliqui: trattandosi di funzione razionale fratta, la presenza dell'asintoto orizzontale esclude la presenza di quelli obliqui;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $y' = -\frac{2}{(1+x)^2}$ che è

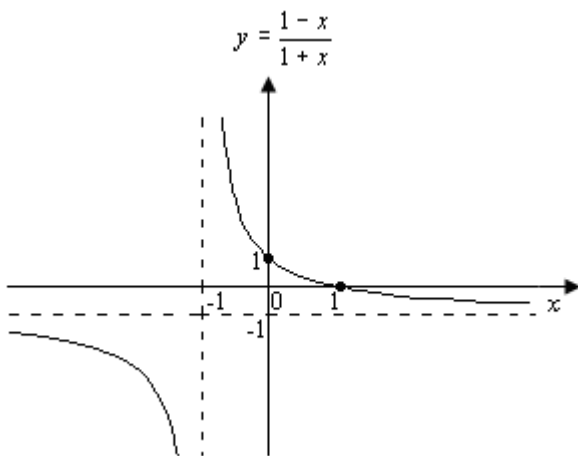
sempre negativa nel dominio $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$; quindi la funzione è strettamente decrescente nel dominio;

Concavità e convessità: la derivata seconda è

$$y'' = \frac{4}{(1+x)^3} \text{ per cui la}$$

funzione presenta concavità verso l'alto in $(-1, +\infty)$ e verso il basso in $(-\infty, -1)$; non esistono flessi.

Il grafico è a lato presentato.



Alternativamente avremmo potuto ricavare il grafico ricordando che la funzione $y = \frac{1-x}{1+x}$ rientra nell'ambito delle funzioni omografiche

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ che si ottengono per traslazione di una iperbole equilatera

referita ai propri asintoti, per cui è definita per $x \neq -\frac{d}{c} = -1$, ha asintoto verticale $x = -\frac{d}{c} = -1$ ed orizzontale $y = \frac{a}{c} = -1$, con centro di simmetria in $C(-1, -1)$.

In altro modo effettuando la trasformazione $\sigma: \begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 1 \end{cases}$, la funzione trasformata nel nuovo riferimento cartesiano (X, Y) sarà

$$Y - 1 = \frac{1 - (X - 1)}{1 + (X - 1)} \rightarrow Y - 1 = \frac{2 - X}{X} \rightarrow Y = \frac{2}{X} \rightarrow XY = 2, \text{ cioè una}$$

iperbole equilatera di asintoti $X = 0, Y = 0$; applicando quindi la trasformazione, la funzione di partenza sarà una iperbole equilatera traslata di asintoti $x = X - 1 = -1, y = Y - 1 = -1$.

Affinchè una funzione $f: D_f \rightarrow C_f$ sia invertibile deve essere suriettiva ed iniettiva; la suriettività è dimostrata dal fatto che nel caso in esame il dominio e il codominio della funzione

$$y = \frac{1-x}{1+x} \text{ concidono } D_f = C_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty); \text{ per l'iniettività,}$$

invece, poiché la derivata della funzione $y' = -\frac{2}{(1+x)^2}$ è sempre

negativa, si potrebbe essere tentati di concludere che la funzione è strettamente decrescente e quindi iniettiva. Tale ragionamento, tuttavia, si basa su un teorema che richiede tra le ipotesi che la funzione sia definita su un intervallo, cosa che nel nostro caso non avviene.

Conviene allora usare direttamente la definizione di funzione iniettiva:

$$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \text{ da } f(x_1) = f(x_2) \text{ ovvero } \frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2}$$

segue $(1-x_1)(1+x_2) = (1-x_2)(1+x_1)$ da cui svolgendo i calcoli ricaviamo $1+x_2-x_1-x_1x_2 = 1+x_1-x_2-x_1x_2 \rightarrow x_1 = x_2$ cioè l'iniettività della funzione.

Per ricavare l'inversa poniamo $y = f(x)$ e risolviamo nella variabile x

l'equazione $\frac{1-x}{1+x} = y$; si ha $x = \frac{1-y}{1+y}$, per cui $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x} = f(x)$

cioè l'inversa di f è f stessa; quindi f ed f^{-1} hanno stesso grafico o equivalentemente il grafico di f^{-1} è il simmetrico di quello di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $y = x$.

Punto 3

La funzione $g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ può essere riscritta nel seguente modo:

$$g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ -\frac{1-x}{1+x} & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

il cui grafico lo si ricava da quello di $y = \frac{1-x}{1+x}$ ribaltando verso le ordinate positive le parti di grafico al di sotto dell'asse delle ascisse. In particolare la derivata prima sarà:

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(1+x)^2} & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ \frac{2}{(1+x)^2} & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

L'equazione della tangente al grafico di $g(x)$ in un punto generico (x_P, y_P) è $y - y_P = g'(x_P)(x - x_P)$; nel punto ad ascissa $x_R = 0$ si ha

$$y_R = 1, g'(x_R) = \left[-\frac{2}{(1+x_R)^2} \right]_{x_R=0} = -2 \text{ per cui l'equazione della}$$

tangente in $R(0,1)$ è $t_1: y = -2x + 1$.

Per quanto riguarda la tangente al punto di ascissa $x_S = 1$, calcoliamo il

limite destro e sinistro della derivata $g'(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-\frac{2}{(1+x)^2} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2}{(1+x)^2} \right] = \frac{1}{2}$$

Essendo limite destro e sinistro finiti e differenti, deduciamo che in $x_s = 1$ la funzione presenta un punto angoloso di non derivabilità, per

cui non ha senso parlare di tangente al grafico di $g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ in

$S(1,0)$; in particolare, trattandosi di punto angoloso, possiamo parlare di tangente a sinistra ed a destra del grafico di $g(x)$ che hanno rispettivamente equazioni

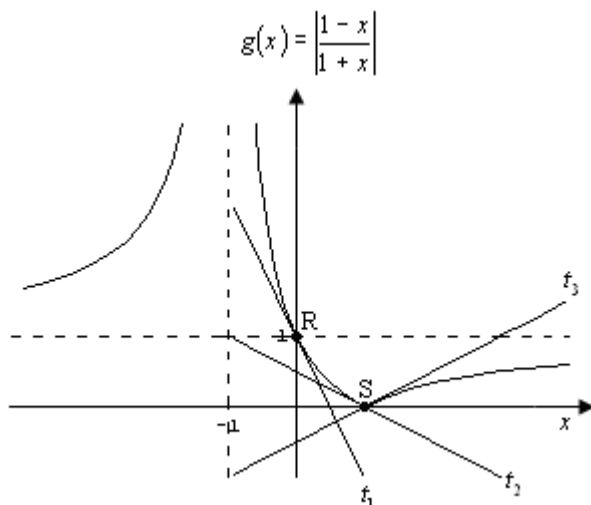
$$t_2 : y = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$t_3 : y = \frac{1}{2}(x-1)$$

Il grafico a lato raffigura la funzione

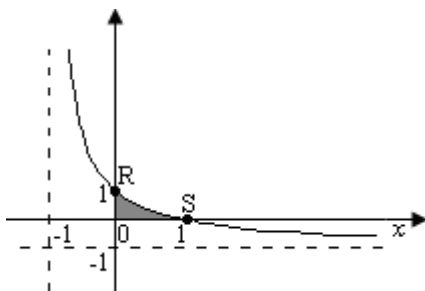
$$g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \text{ e le tre}$$

tangenti nello stesso riferimento cartesiano.



Punto 4

Consideriamo il grafico a lato in cui
l'area da calcolare è colorata in grigio:
L'area vale



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x} - 1 \right) dx = \left[2 \ln|x+1| \right]_0^1 - 1 = \\
 &= 2 \ln 2 - 1 = \ln 4 - 1 = \ln \left(\frac{4}{e} \right)
 \end{aligned}$$

PROBLEMA2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy , si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0, b \neq 1$).

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b . Si illustri come varia G_b al variare di b .
2. Sia P un punto di G_b . La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B . Si dimostri che, qualsiasi sia P , il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O tangente a G_e ($e =$ numero di Nepero). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y , da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

RISOLUZIONE

Punto 1

Al variare di $b > 0, b \neq 1$, il grafico G_b sta sempre nel semispazio delle ordinate positive e tutti i grafici passeranno per il punto $(0,1)$. Fissato $b > 0, b \neq 1$, studiamo la funzione $f(x) = b^x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = \begin{cases} 0 & \text{se } b > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Dai limiti soprastanti deduciamo che $f(x) = b^x$ presenta l'asintoto orizzontale destro $y = 0$ se $0 < b < 1$, mentre presenta l'asintoto orizzontale sinistro $y = 0$ se $b > 1$.

Le derivate prima e seconda sono rispettivamente:

$$f'(x) = \ln b \cdot b^x$$

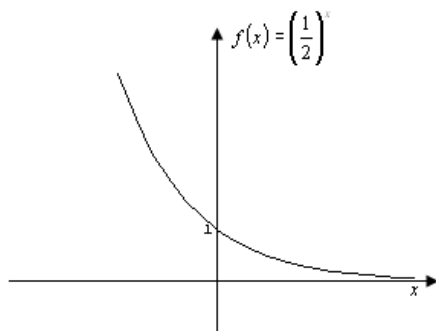
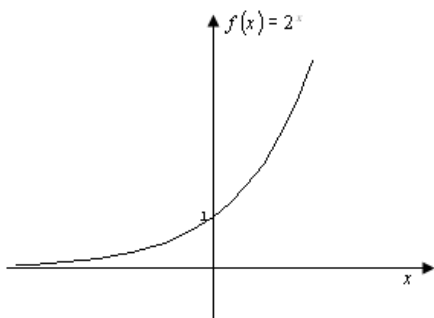
$$f''(x) = (\ln b)^2 \cdot b^x$$

da cui deduciamo che se $b > 1$ ($\ln b > 0$) la funzione è strettamente crescente, mentre se $0 < b < 1$ ($\ln b < 0$) è strettamente decrescente; in ambo i casi la funzione è convessa in tutto $\mathbb{R}$ cioè volge sempre concavità verso l'alto in quanto $(\ln b)^2 > 0 \forall b > 0 \wedge b \neq 1$.

Inoltre poiché $\left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$, deduciamo che $(x, y) \in G_{\frac{1}{b}}$ se $(-x, y) \in G_b$,

in altre parole il grafico di $G_{\frac{1}{b}}$ lo si ricava per simmetria intorno all'asse delle ordinate a partire da quello di G_b .

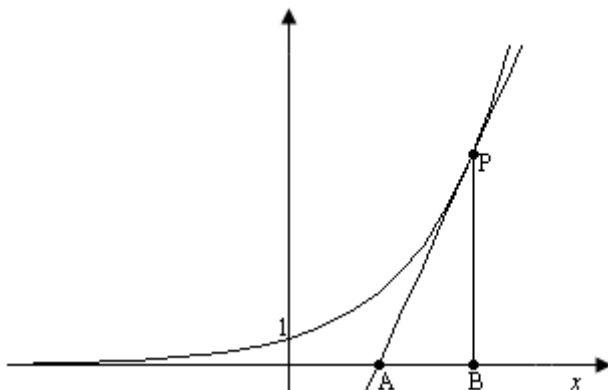
Di seguito due grafici per $b = 2, b = \frac{1}{2}$:



Punto 2

Consideriamo la figura a lato, in cui si è assunto senza ledere la generalità del problema $b > 1$.

Il generico punto P ha



coordinate $P(a, b^a)$, per cui il punto B avrà coordinate $B(a, 0)$; la tangente al grafico di $f(x) = b^x$ in un punto generico (x_p, y_p) è $y - y_p = f'(x_p)(x - x_p)$; nel punto ad ascissa $x_p = a$ si ha $f'(x_p) = [\ln b \cdot b^x]_{x_p=a} = \ln b \cdot b^a$ per cui l'equazione della tangente in $P(a, b^a)$ è $y = \ln b \cdot b^a \cdot (x - a) + b^a$. L'ascissa del punto A si ricava imponendo $y = 0$ in $y = \ln b \cdot b^a \cdot (x - a) + b^a$, da cui $A\left(a - \frac{1}{\ln b}, 0\right)$.

Il segmento $\overline{AB}$ misura allora: $\overline{AB} = |x_B - x_A| = \left| a - \left(a - \frac{1}{\ln b} \right) \right| = \frac{1}{|\ln b|}$

che risulta essere, fissato b , costante al variare di $P(a, b^a)$. La lunghezza del segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ si chiama sottotangente e le funzioni esponenziali $f(x) = b^x$ hanno la sottotangente costante pari a

$$\frac{1}{|\ln b|} = |\log_b e|.$$

Inoltre $\overline{AB} = \frac{1}{|\ln b|} = 1$ se $|\ln b| = 1 \rightarrow \ln b = \pm 1$ e cioè se $b = e \vee b = \frac{1}{e}$.

Punto 3

Un generico punto P del grafico G_e di $g(x) = e^x$ ha coordinate $P(a, e^a)$ e la tangente in $P(a, e^a)$ a G_e ha equazione $y = e^a \cdot (x - a) + e^a$.

Imponendo il passaggio per l'origine $O(0, 0)$ della retta tangente, si ha:

$$0 = e^a \cdot (0 - a) + e^a \rightarrow e^a(1 - a) = 0 \rightarrow a = 1 \text{ in quanto } e^a > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Quindi la retta tangente passante per l'origine ha equazione $y = e \cdot x$ e forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo pari all'arcotangente del coefficiente angolare

$$\alpha = \arctan(e) [\text{rad}] \approx 1,2182 [\text{rad}].$$

Punto 4

Consideriamo il grafico a lato in cui l'area da calcolare D è colorata in grigio:

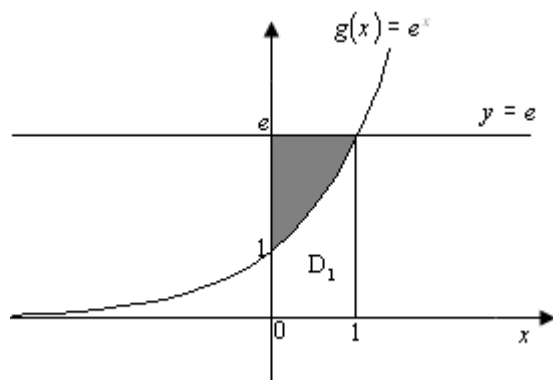
Tale area può essere calcolata come differenza delle aree:

del rettangolo R di vertici $(0,0), (1,0), (1,e), (0,e)$;

dell'area D_1 sottesa da G_e

compresa tra le ascisse

$x = 0, x = 1$



L'area del rettangolo vale $S(R) = e \cdot 1 = e$ mentre l'area sottesa da G_e

compresa tra le ascisse $x = 0, x = 1$ vale $S(D_1) = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$.

In conclusione $S(D) = S(R) - S(D_1) = e - (e - 1) = 1$.

Alternativamente l'inversa della funzione $g(x) = e^x$ è $g^{-1}(y) = \ln y$ con $y > 0$, per cui l'area da calcolare diventa:

$$S(D) = \int_1^e \ln y dy = [y(\ln y - 1)]_1^e = [e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1)] = [e(1 - 1) - 1(0 - 1)] = 1$$

in cui si è applicata l'integrazione per parti.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n . Si dimostri che la sua derivata n -esima è $p^{(n)}(x) = n! \cdot a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n .

Un generico polinomio $p(x)$ di grado n può essere scritto nel seguente modo:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ con } a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n$$

Calcoliamo le derivate prima, seconda e così via sino all' n -esima:

$$p'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 \cdot a_2 x + a_1$$

$$p''(x) = n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-2} + (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 2 \cdot a_2$$

$$p'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_n x^{n-3} + (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a_{n-1} x^{n-4} + \dots + 6 \cdot a_3$$

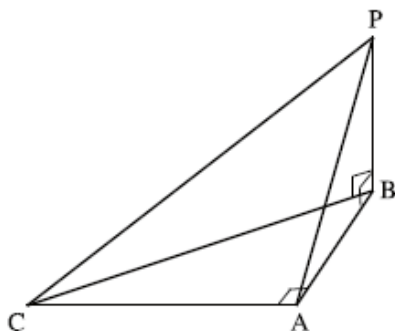
$\vdots$

$$p^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n = n! \cdot a_n$$

Quesito 2

Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB , PBC , PCA sono triangoli rettangoli.

Consideriamo la figura a lato rappresentante la geometria del problema. Poiché la retta PB è ortogonale al piano del triangolo, essa è ortogonale a tutte le rette del piano passanti per B, quindi è ortogonale a BA e BC, da cui deduciamo che i triangoli PBC e PBA sono entrambi



rettangoli in B. Ci resta da dimostrare che anche PAC è rettangolo; in particolare vogliamo dimostrare che PAC è rettangolo in A. Ciò è vero

se, applicando il teorema di Pitagora, si ha $\overline{PC}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AC}^2$.

Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli PBA, PBC ed ABC otteniamo:

$$\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{AB}^2 \quad (1)$$

$$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 \quad (2)$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \quad (3)$$

Sostituendo le espressioni (1) e (3) in (2) si ha:

$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 = (\overline{PA}^2 - \overline{AB}^2) + (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) = \overline{PA}^2 + \overline{AC}^2$ cioè il triangolo PAC è rettangolo in A.

Quesito 3

Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?

La pendenza della retta tangente in x a una funzione $f(x)$ è la derivata prima di $f(x)$. Nel caso in esame la derivata prima di $f(x) = e^{3x} + 1$ è $f'(x) = 3e^{3x}$, per cui imponendo $f'(x) = 3e^{3x} = 2$ si ricava

$$e^{3x} = \frac{2}{3} \rightarrow 3x = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow x = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right). \text{ In corrispondenza di}$$

$$x = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) \text{ si ha } f\left(\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)\right) = e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}. \text{ Quindi la}$$

funzione $f(x) = e^{3x} + 1$ ha tangente in $\left(\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right), \frac{5}{3}\right)$ con pendenza pari

a 2.

Quesito 4

Si calcoli: $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \sin \frac{1}{x}$

Effettuiamo il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$; se $x \rightarrow \infty$ $y \rightarrow 0$, per cui

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \sin \frac{1}{x} = 4 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 4$$

in cui si è sfruttato il limite notevole $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

Quesito 5

Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

Consideriamo la figura a lato in cui è rappresentato in sezione un cono di apotema $a = 80\text{cm}$, altezza h e raggio di base r .

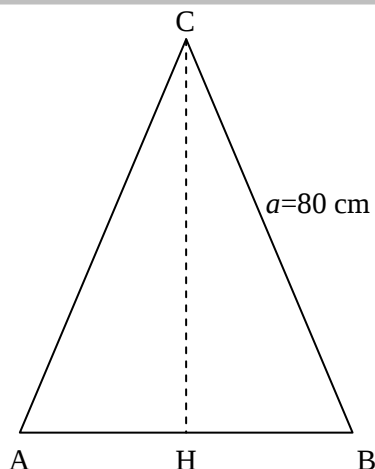
Poniamo $\overline{CH} = x$, $0 < x < 80$. Il raggio di base per il teorema di Pitagora

misura $\overline{HB} = r = \sqrt{6400 - x^2}$.

Il volume del cono è

$$V(x) = \frac{\pi h r^2}{3} = \frac{\pi}{3} x (6400 - x^2).$$

La massimizzazione del volume la effettuiamo mediante derivazione.

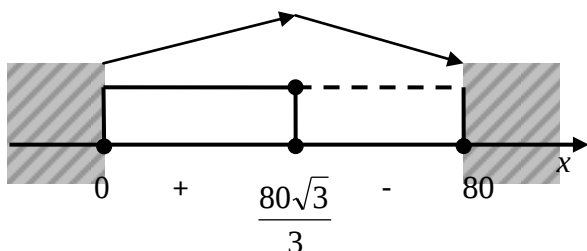


Si ha:

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(6400 - 3x^2)$$

$$V'(x) > 0 \rightarrow 0 < x < \frac{80\sqrt{3}}{3}$$

$$V'(x) < 0 \rightarrow \frac{80\sqrt{3}}{3} < x < 80$$



quindi il volume è strettamente crescente in $\left(0, \frac{80\sqrt{3}}{3}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}, 80\right)$.

Inoltre $V''(x) = -2\pi x$ e $V''\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{160\pi\sqrt{3}}{3} < 0$ per cui il volume è

massimo per $x = \frac{80\sqrt{3}}{3}$ e vale

$$\begin{aligned} V_{MAX} &= V\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}\right)\left(6400 - \frac{6400}{3}\right) = \frac{1024000\sqrt{3}}{27}\pi \text{ [cm}^3\text{]} = \\ &= \frac{1024\sqrt{3}}{27}\pi \text{ [dm}^3\text{]} \end{aligned}$$

Ricordando che $1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$, il volume massimo in litri è

$$V_{MAX} = \frac{1024\sqrt{3}}{27} \pi \text{ litri} \cong 206,37 \text{ litri}.$$

Quesito 6

Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$

Il dominio di $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ è l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano la disequazione $\cos(x) \geq 0$, cioè $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Quesito 7

Per quale o quali valori di k la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$

è continua in $x = 4$?

Affinché la funzione $h(x)$ sia continua in $x = 4$ deve aversi

$\lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} h(x)$. Per il caso in esame i limiti sinistro e destro valgono rispettivamente:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (3x^2 - 11x - 4) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (kx^2 - 2x - 1) = 16k - 9$$

Imponendone l'uguaglianza si ha $16k - 9 = 0 \Rightarrow k = \frac{9}{16}$.

In $x = 4$ la funzione è tuttavia non derivabile e presenta un punto angoloso in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (6x - 11) = 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{9}{8}x - 2 \right) = \frac{5}{2}$$

Quesito 8

Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?

Una progressione aritmetica è una successione di numeri tali che la differenza tra ciascun termine e il suo precedente sia una costante. Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

Nel caso in esame, i numeri $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica se $\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-3}$ ovvero se $\binom{n}{n-3} - 2\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} = 0$.

Esplicitiamo i singoli coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{n-3} = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 6} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$$

Si ha quindi:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} - 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} - n \cdot (n-1) + n = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} - n \cdot (n-2) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{n \cdot (n-2)}{6} (n-1-6) = \frac{n \cdot (n-2) \cdot (n-7)}{6} = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 0 < 3 \text{ non acc.} \\ n = 2 < 3 \text{ non acc.} \\ n = 7 > 3 \text{ acc.} \end{cases}$$

In conclusione il valore accettabile è $n = 7$ cui corrispondono i tre

valori $\binom{7}{6} = 7, \binom{7}{5} = 21, \binom{7}{4} = 35$.

Quesito 9

Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$, $AC = 2$ e $\hat{A}BC = 45^\circ$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $\hat{A}BC = 30^\circ$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

Consideriamo la figura a lato, rappresentante il triangolo

ABC con $\overline{AC} = 2$, $\overline{AB} = 3$, $\hat{A}BC = \alpha$ e

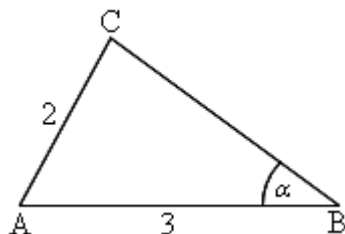
consideriamo i

casi corrispondenti ad $\alpha = 45^\circ$ ed $\alpha = 30^\circ$.

- $\alpha = 45^\circ$

Applicando il teorema dei seni si ha:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\hat{A}CB)} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha)} \rightarrow \sin(\hat{A}CB) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \sin(\alpha) \rightarrow \sin(\hat{A}CB) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$



Poiché $\frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$, un triangolo con $\overline{AC} = 2, \overline{AB} = 3, \hat{ABC} = 45^\circ$ non esiste.

- $\alpha = 30^\circ$

Applicando ancora una volta il teorema dei seni si ricava:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\hat{ACB})} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha)} \rightarrow \sin(\hat{ACB}) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \sin(\alpha) \rightarrow \sin(\hat{ACB}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{ACB} = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \cong 48,6^\circ \vee \hat{ACB} = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \cong 131,4^\circ$$

Il terzo angolo sarà di conseguenza

$$\hat{CAB} = 180^\circ - 30^\circ - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \cong 101,4^\circ \vee \hat{CAB} \cong 18,6^\circ.$$

In tal caso esistono, quindi, due triangoli che soddisfano le condizioni $\overline{AC} = 2, \overline{AB} = 3, \hat{ABC} = 30^\circ$.

Per calcolare la misura del terzo lato si può procedere in due modi distinti:

- Teorema dei seni

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha)} = \frac{\overline{BC}}{\sin(\hat{CAB})} \rightarrow \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin(\hat{CAB})}{\sin(\alpha)} \rightarrow \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin(150^\circ - \hat{ACB})}{\frac{1}{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = 2 \cdot \overline{AC} \cdot \sin(150^\circ - \hat{ACB}) = 4 \cdot [\sin 150^\circ \cos \hat{ACB} - \cos 150^\circ \sin \hat{ACB}] \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = 4 \left[\frac{\cos \hat{ACB}}{2} + \frac{\sqrt{3} \sin \hat{ACB}}{2} \right] = 4 \left[\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \hat{ACB}}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \hat{ACB}}{2} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = 4 \cdot \left(\frac{\pm \sqrt{1 - \frac{9}{16}}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}}{2} \right) = 4 \cdot \left(\pm \frac{\sqrt{7}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{(3\sqrt{3} \pm \sqrt{7})}{2}$$

• Teorema di Carnot

posto $\overline{BC} = x$ si ha

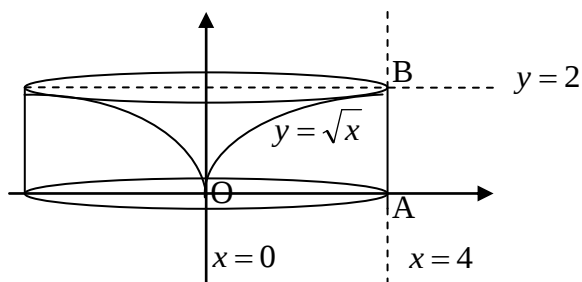
$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + x^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot x \cdot \cos(\alpha) \rightarrow 4 = 9 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 3\sqrt{3} \cdot x + 5 = 0 \rightarrow x = \overline{BC} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$$

Quesito 10

Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y .

Consideriamo la figura a lato rappresentante il solido di volume V ottenuto dalla rotazione intorno all'asse y della regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$.



Il volume richiesto è dato dalla differenza del volume del cilindro di altezza $\overline{AB} = 2$ e raggio di base $\overline{OA} = 4$ ed il volume ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse y e dalla retta $y = 2$.

Il volume del cilindro è $V_C = \pi \cdot \overline{OA}^2 \cdot \overline{AB} = 32\pi$.

Il volume ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da

$y = \sqrt{x}$, dall'asse y e

dalla retta $y = 2$, è $V_D = \pi \cdot \int_0^2 g^2(y) dy$ dove $g(y) = y^2, 0 \leq y \leq 2$;

quindi

$$V_D = \pi \cdot \int_0^2 g^2(y) dy = \pi \cdot \int_0^2 y^4 dy = \pi \cdot \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32}{5} \pi.$$

$$\text{In conclusione } V = V_C - V_D = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi.$$

È possibile seguire altre svariate strade per risolvere il quesito.

Una prima alternativa consente di calcolare il volume nel seguente modo: consideriamo il cilindro C ottenuto ruotando attorno all'asse delle y il segmento AB di estremi $A(x,0), B(x, \sqrt{x})$; tale cilindro avrà superficie laterale pari a $S(x) = 2\pi x \cdot \sqrt{x}$ integrando la quale in $[0,4]$ si ottiene il volume:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 S(x) dx = \int_0^4 2\pi x \cdot \sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \\ &= 2\pi \cdot \frac{2}{5} \left[x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{4}{5} \pi \cdot 4^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \pi \cdot 2^5 = \frac{128}{5} \pi \end{aligned}$$

Una seconda alternativa consiste, invece, nel pensare la regione decomposta in tanti rettangoli ognuno dei quali genera un solido pari alla differenza di due cilindretti, in modo che, intuitivamente potremo pensare il solido come somma progressiva di infiniti gusci cilindrici coassiali di spessore dx , dove il raggio x varia da 0 a 4.

Il volume del guscio (infinitesimo) può essere calcolato come prodotto dell'area circolare di base di raggio esterno $(x_i + \Delta x_i)$ e raggio interno x_i , per l'altezza: $V_i = \pi \cdot [(x_i + \Delta x_i)^2 - x_i^2] \cdot \sqrt{x_i}$. Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a Δx_i^2 il volume infinitesimo sarà

$V_i = 2\pi \cdot x_i \cdot \sqrt{x_i} \cdot \Delta x_i = 2\pi \cdot x_i^{\frac{3}{2}} \cdot \Delta x_i$. Se il numero di gusci cilindrici in cui suddividiamo l'intervallo $[0,4]$ è N il volume richiesto sarà:

$$V = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N V_i = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^N 2\pi \cdot x_i^{\frac{3}{2}} \cdot \Delta x_i \right) = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4\pi}{5} \left[x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{128}{5} \pi.$$