ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO 2010

Indirizzo: P.N.I. + scientifico autonomia + scientifico Brocca + Proteo.

CORSO SPERIMENTALE

Sessione straordinaria 2010

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sono dati: una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2$ e la tangente *t* parallela al diametro. Si prolungano i raggi OA ed OB di due segmenti uguali AP e BQ e dai punti P e Q si conducono le tangenti alla semicirconferenza, che intersecano la retta *t* rispettivamente nei punti M ed N.

1. Si provi che l'area $S(x)$ della superficie del solido generato in una rotazione completa del trapezio PQNM attorno alla retta PQ, è data da:

$$S(x) = 2\pi \cdot \frac{3 - 2\cos x}{senx}.$$

2. Si studi la funzione $f(x) = S(x)/2\pi$ e se ne tracci il grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$, mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.

3. Si verifichi che $G(x) = \log\left|tg\frac{x}{2}\right|$ è una funzione primitiva di $g(x) = \frac{1}{senx}$.

4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

2. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e l'equazione della perpendicolare alla suddetta tangente, che determina con essa e con la direzione positiva dell'asse x un triangolo avente area 4.

3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dalla tangente inflessionale e dalla retta di equazione $x = \sqrt{3}.$

4. Dopo aver verificato che sono soddisfatte le condizioni di invertibilità, si ricavi l'espressione analitica della funzione inversa $x = g(y)$ della funzione data.

QUESTIONARIO

1. Due osservatori si trovano ai lati opposti di un grattacielo, a livello del suolo. La cima dell'edificio dista 1600 metri dal primo osservatore, che la vede con un angolo di elevazione di 15°. Se il secondo individuo si trova a 650 metri dalla cima del grattacielo, quale è la distanza tra i due osservatori?

2. Si calcoli il limite della funzione $(1+tgx)^{ctgx}$ quando x tende a 0.

3. In quanti modi 10 persone possono disporsi su dieci sedili allineati? E attorno ad un tavolo circolare?

4. Si dimostri che ogni funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dove a, b, c, d sono valori reali con $a \neq 0$, ha un massimo e un minimo relativi oppure non ha estremanti.

5. Si calcoli il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x del triangolo di vertici A(2, 2) , B(6, 4) , C(6, 6)

6. I vertici di un triangolo sono: O(0,0) , A(0,2) , B(1,1). Si trovi l'equazione della circonferenza γ inscritta nel triangolo OAB e quella della circonferenza γ' ad esso circoscritta.

7. Si verifichi che la cubica di equazione $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

8. Si dimostri che l'equazione $\frac{1}{x} - e^x = 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

9. Una rappresentanza di cinque persone deve essere scelta a caso tra dieci uomini e tre donne. Qual è la probabilità che il comitato sia costituito da tre uomini e due donne?

10. Sia data l'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e il rombo in essa inscritto, con i vertici coincidenti con quelli dell'ellisse. Si scelga a caso un punto all'interno dell'ellisse: si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al rombo.

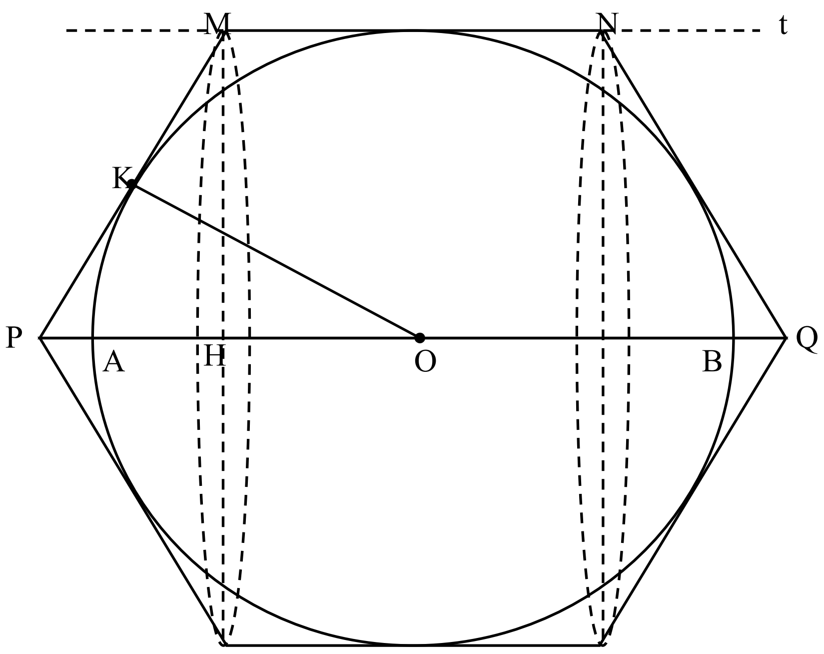
Durata massima della prova: 6 ore.
E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

Svolgimento a cura di Nicola de Rosa

PROBLEMA 1

Punto 1

Consideriamo la figura sottostante rappresentante la geometyria del problema.



La superficie laterale del solido ottenuto dalla rotazione del trapezio isoscele PQNM attorno alla retta PQ è dato dalla somma del doppio della superficie laterale del cono di apotema MP e raggio di base MH e del cilindro di altezza MN e raggio di base MH, $S = 2S_{L,Cono} + S_{L,Ci\lim dro} = 2\pi \cdot \overline{MH} \cdot \overline{MP} + 2\pi \cdot \overline{MH} \cdot \overline{MN} = 2\pi \cdot \overline{MH} \cdot \left(\overline{MP} + \overline{MN}\right)$.

Poiché $\overline{MH} = 1$ la superficie da trovare sarà $S = 2\pi \cdot \left(\overline{MP} + \overline{MN}\right)$.

La traccia non ci dice quale angolo deve avere ampiezza *x*, per cui a nostra scelta poniamo $M\hat{P}H = x$ con $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; applicando il teorema dei triangoli rettangoli al triangolo MPH si ha $\overline{MH} = \overline{MP} \cdot \sin x \to \overline{MP} = \frac{1}{\sin x}$; applicando lo stesso teorema al triangolo KPO si ha $\overline{KO} = \overline{PO} \cdot \sin x \to \overline{PO} = \frac{1}{\sin x}$. Per differenza $\overline{OH} = \overline{PO} - \overline{PH} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$, per cui $\overline{MN} = 2\overline{OH} = 2\left(\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right)$. La superficie totale sarà quindi:

$$S(x) = 2\pi \cdot \left(\overline{MP} + \overline{MN}\right) = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{\sin x} + 2\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)\right] = 2\pi \cdot \frac{3-2\cos x}{\sin x}.$$

Punto 2

Studiamo la funzione $f(x) = \frac{S(x)}{2\pi} = \frac{3-2\cos x}{\sin x}$ in $[0,2\pi]$

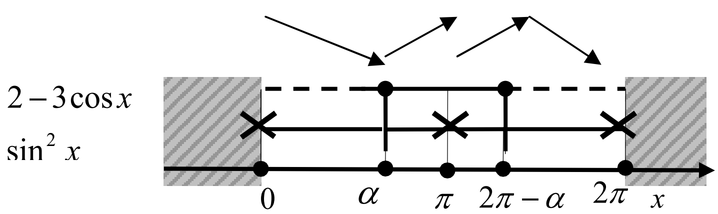
- *Dominio*: $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi\ k \in Z$; in particolare nell'intervallo $[0,2\pi]$, la condizione $x \neq k\pi\ k \in Z$ diventa $x \neq 0 \wedge x \neq \pi \wedge x \neq 2\pi$ per cui il dominio è $x \in (0,\pi) \cup (\pi,2\pi)$;
- *Intersezione asse ascisse*: non ve ne sono in quanto l'equazione $\cos x = \frac{3}{2}$ non ha soluzioni in R;
- *Intersezione asse ordinate*: non ve ne sono in quanto $x = 0$ non appartiene al dominio;
- *Simmetrie*: la funzione è periodica di periodo $T = 2\pi$ e dispari in quanto $f(-x) = \frac{3-2\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{3-2\cos x}{-\sin x} = -f(x)$;
- *Positività*: $f(x) > 0 \rightarrow \sin x > 0 \rightarrow x \in (0,\pi)$ in quanto $(3-2\cos x) > 0\ \forall x \in R \supset [0,2\pi]$;
- *Asintoti verticali*:
  $\lim_{x\to 0^+} \frac{3-2\cos x}{\sin x} = +\infty$, $\lim_{x\to \pi^-} \frac{3-2\cos x}{\sin x} = +\infty$, $\lim_{x\to \pi^+} \frac{3-2\cos x}{\sin x} = -\infty$, $\lim_{x\to 2\pi^-} \frac{3-2\cos x}{\sin x} = -\infty$ per cui le rette $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$ sono asintoti verticali;
- *Asintoti orizzontali*: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;
- *Asintoti obliqui*: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $f'(x) = \frac{2\sin^2 x - (3-2\cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{2-3\cos x}{\sin^2 x}$; studiamo il segno della derivata prima:

  $N: 2-3\cos x > 0 \Rightarrow \cos x < \frac{2}{3} \Rightarrow \arccos\left(\frac{2}{3}\right) < x < 2\pi - \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

  $D: \sin^2 x > 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq \pi \wedge x \neq 2\pi$

  $f'(x) > 0 \Rightarrow \arccos\left(\frac{2}{3}\right) < x < \pi \vee \pi < x < 2\pi - \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

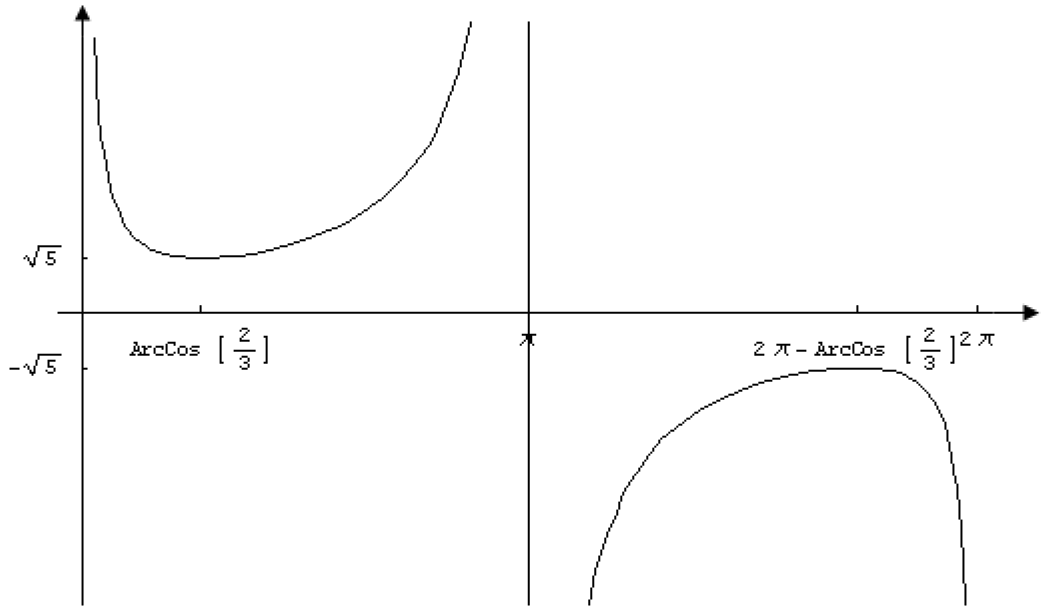
  Il quadro dei segni è di seguito presentato:



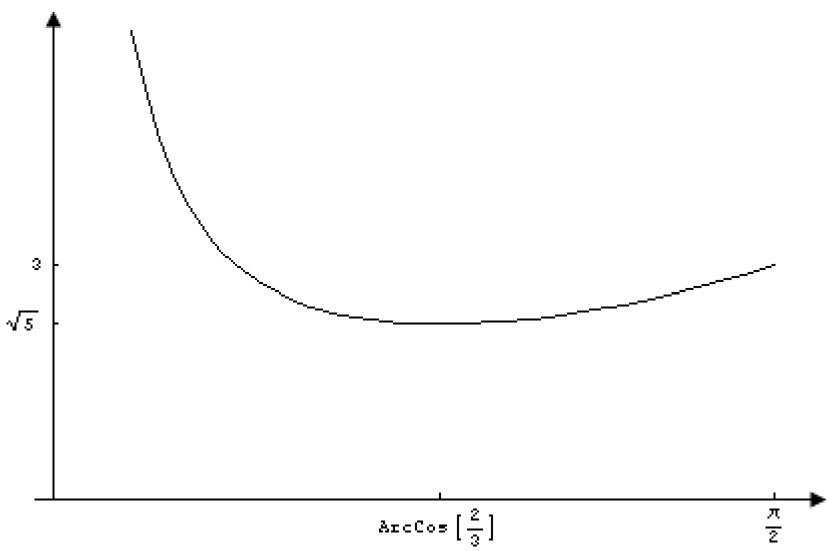
Dal quadro soprastante deduciamo che la funzione presenta un minimo relativo in $m=\left(\arccos\frac{2}{3},\sqrt{5}\right)$ e un massimo relativo in $M=\left(2\pi-\arccos\frac{2}{3},-\sqrt{5}\right)$;

- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $f''(x)=\frac{3\cos^2 x-4\cos x+3}{\sin^3 x}$ per cui $f''(x)>0 \Leftrightarrow \sin^3 x>0 \Rightarrow \sin x>0 \Rightarrow x(0,\pi)$ in quanto $3\cos^2 x-4\cos x+3>0$ $\forall x\in R\supset[0,2\pi]$. Quindi la funzione presenta concavità verso l'alto in $(0,\pi)$ e verso il basso in $(\pi,2\pi)$ e non presenta flessi .

  Il grafico nell'intervallo $[0,2\pi]$ è di seguito presentato:



La geometria del problema imporrebbe $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$; in questo intervallo è presentato il grafico di seguito:



Punto 3

Sfruttando le relazioni trigonometriche, scriviamo la funzione $\sin x$ come $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$.

Calcoliamo le primitive del seguente integrale indefinito: $F(x) = \int \frac{1}{\sin x}dx$.

Effettuiamo la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2} \to x = 2\arctan t \to dx = \frac{2}{1+t^2}dt$; in questo modo l'integrale diventa $F(x) = \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \dfrac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}\left(\frac{2}{1+t^2}\right)dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$; posto c=0 ricaviamo la primitiva $G(x) = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

Punto 4

L'area richiesta è pari a

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3-2\cos x}{\sin x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{\sin x} - 2\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx = \left[3\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - 2\ln|\sin x|\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \underbrace{3\ln\underbrace{\left|\tan\frac{\pi}{4}\right|}_{=1}}_{\ln 1=0} - \underbrace{2\ln\underbrace{\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|}_{=1}}_{\ln 1=0} - 3\ln\left|\tan\frac{\pi}{6}\right| + 2\ln\left|\sin\frac{\pi}{3}\right| = -3\ln\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\ln\frac{\sqrt{3}}{2} = -\ln\frac{\sqrt{3}}{9} + \ln\frac{3}{4} = \ln\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

PROBLEMA 2

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

- *Dominio*: $x + \sqrt{1 + x^2} > 0 \Rightarrow \sqrt{1 + x^2} > -x \rightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ 1 + x^2 > (-x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 + x^2 > 0 \\ -x < 0 \end{cases}$ risolvendo i quali si ha: $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \in R \end{cases} \cup \begin{cases} x \in R \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow x \leq 0 \cup x > 0 \Leftrightarrow x \in R$;
- *Intersezione asse ascisse*: $\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = 0 \Rightarrow x + \sqrt{1 + x^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{1 + x^2} = 1 - x$; posto $x \leq 1$, elevando al quadrato ambo i membri otteniamo l'equazione $\cancel{1} + \cancel{x^2} = \cancel{1} + \cancel{x^2} - 2x \rightarrow x = 0$ accettabile in quanto soddisfa la condizione $x \leq 1$;
- *Intersezione asse ordinate*: $x = 0 \rightarrow f(0) = \ln 1 = 0$;
- *Simmetrie*: la funzione non è né pari né dispari;
- *Positività*: $f(x) > 0 \rightarrow \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) > 0 \rightarrow x + \sqrt{1 + x^2} > 1 \rightarrow \sqrt{1 + x^2} > 1 - x$ le cui soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi $\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 + x^2 > (1 - x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 + x^2 > 0 \\ 1 - x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \in R \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow 0 < x \leq 1 \vee x > 1 \Leftrightarrow x > 0$;
- *Asintoti verticali*: non ve ne sono in quanto il dominio è R;
- *Asintoti orizzontali*: non ve ne sono in quanto

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \ln(+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \ln(+\infty - \infty) \text{F.I} \rightarrow$$

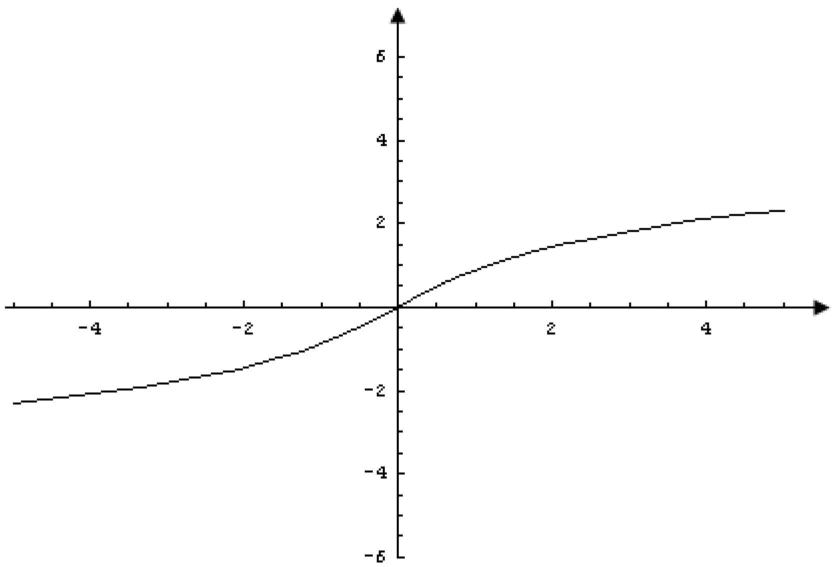
$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2} - x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \ln \frac{1}{-x\left(\underbrace{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1}_{\rightarrow 2}\right)} = \ln\left(\frac{1}{+\infty}\right) = \ln 0 = -\infty;$$

- *Asintoti obliqui*: non ve ne sono in quanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{x} \xrightarrow{Hospital} \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = 0 \;;$$

- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ che risulta essere sempre positiva in tutto R; quindi la funzione è sempre crescente;
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $f''(x)=\frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ per cui $f''(x)>0 \Leftrightarrow -x>0 \Rightarrow x<0$ in quanto $\sqrt{(1+x^2)^3}$ $\forall x \in R$. Quindi la funzione presenta concavità verso l'alto in $(-\infty,0)$ e verso il basso in $(0,+\infty)$ e presenta un flesso a tangente obliqua in $F(0,0)$ con tangente in flessionale di equazione $y=mx$ con $m=f'(0)=1$; la tangente quindi ha equazione $y=x$.

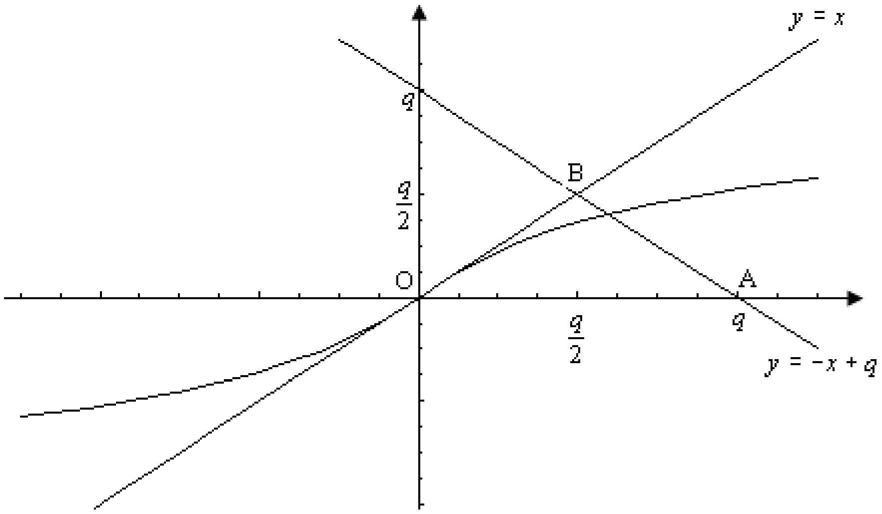
  Il grafico è di seguito presentato:



Punto 2

La tangente in flessionale ha equazione $y=x$ come dimostrato al punto 1. La perpendicolare a suddetta tangente ha equazione generica $y=-x+q$; determiniamo q in modo che l'area del triangolo formato della tangente, dalla perpendicolare ad essa e dall'asse positivo delle ascisse sia pari a 4. Notiamo che poiché il triangolo deve essere formato con la direzione positiva delle ascisse deve aversi $q>0$. Consideriamo la figura di seguito rappresentante la geometria del problema.

La tangente in flessionale e la perpendicolare ad essa si incontrano nel punto $\left(\frac{q}{2},\frac{q}{2}\right)$.



La base del triangolo AOB è $\overline{\mathrm{OA}} = q$ mentre l'altezza è pari all'ordinata di B cioè $\frac{q}{2}$ cui corrisponde un'area pari a $S(\mathrm{AOB}) = \frac{q^2}{4}$; imponendo $S(\mathrm{AOB}) = \frac{q^2}{4} = 4$ ricaviamo $q = \pm 4$; poiché deve essere $q > 0$ la soluzione accettabile è $q = 4$ cui corrisponde una perpendicolare alla tangente di equazione $y = -x + 4$.

Punto 3

L'area richiesta è pari a $S = \int_0^{\sqrt{3}} \left[x - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] dx$.

Ricordando che la derivata prima della funzione $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ è $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ e applicando l'integrazione per parti al secondo integrando si ha:

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \left[x - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} - \left[x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^{\sqrt{3}} + \int_0^{\sqrt{3}} \left(x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} - \left[x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^{\sqrt{3}} + \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3}{2} - \sqrt{3} \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) + 2 - 1 = \frac{5}{2} - \sqrt{3} \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

Punto 4

La funzione $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ è strettamente crescente in tutto R avendo derivata prima $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sempre positiva in tutto il dominio R, quindi è invertibile. Calcoliamo l'inversa:

$$y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \rightarrow x + \sqrt{1+x^2} = e^y \rightarrow \sqrt{1+x^2} = e^y - x$$

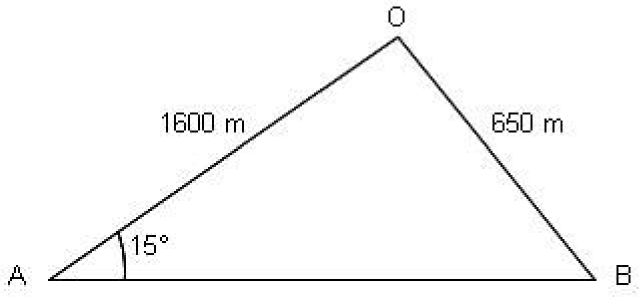
Posto $e^y - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^y$ è possibile elevare al quadrato ambo i membri, ottenendo:

$\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 = \left(e^y - x\right)^2 \rightarrow 1 + \cancel{x^2} = e^{2y} - 2xe^y + \cancel{x^2} \rightarrow x = g(y) = \dfrac{e^{2y}-1}{2e^y} = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = \sinh y$ cioè la funzione inversa non è altro che il seno iperbolico.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si consideri la figura seguente rappresentante la geometria del problema.



Bisogna calcolare la distanza $\overline{AB}$; posto $\overline{AB}=x$ ed applicando il teorema di Carnot al triangolo AOB si ha $\overline{AB}^2+\overline{AO}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AO}\cdot\cos\left(O\hat{A}B\right)=\overline{OB}^2$; sostituendo i valori l'equazione diventa

$$x^2+1600^2-2\cdot x\cdot 1600\cdot\cos(15°)=650^2\rightarrow x^2-3200x\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+\left(1600^2-650^2\right)=0\rightarrow$$

$$\rightarrow x^2-800x\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+2137500=0\rightarrow x=400\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\pm\sqrt{160000\left(8-4\sqrt{3}\right)-2137500}\rightarrow$$

$$\rightarrow x=400\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\pm\sqrt{2500\left(256\sqrt{3}-343\right)}=400\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\pm 50\sqrt{256\sqrt{3}-343}\rightarrow$$

$$\rightarrow x=50\left(8\sqrt{6}+8\sqrt{2}\pm\sqrt{256\sqrt{3}-343}\right)\rightarrow\left\langle\begin{array}{l}x_+=2046{,}49\text{ m}\\x_-=1044{,}47\text{ m}\end{array}\right.$$

Poiché i due osservatori si trovano ai lati opposti del grattacielo, la soluzione accettabile è $\overline{AB}=2046{,}49\text{ m}$.

Quesito 2

Posto $\tan x=\frac{1}{t}$, se $x\rightarrow 0$ allora $t\rightarrow\infty$, per cui il limite sarà:

$$\lim_{x\rightarrow 0}\left(1+\tan x\right)^{\cot anx}=\lim_{t\rightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

Quesito 3

E' un problema classico del calcolo combinatorio. Nei tanti modi in cui le persone possono sedersi conta l'ordine quindi stiamo parlando di disposizioni. Poiché devo fare gruppi ordinati di 10 persone disponendo proprio 10 persone stiamo parlando di permutazioni. La soluzione è data da

$$D_{10,10}=10!=10\cdot 9\cdot 8\cdots\cdots 2\cdot 1=3628800$$

Consideriamo ora il caso in cui debbano sedersi in cerchio. Per ciascuno dei modi sedersi esistono altri nove modi del tutto equivalenti ottenuti ruotando tutti i posti allo stesso modo. In sostanza i possibili modi possono essere raggruppati a 10a 10 quindi i possibili modi di sedersi in cerchio sono

$$\frac{D_{10,10}}{10}=\frac{10!}{10}=9!=9\cdot 8\cdots\cdots 2\cdot 1=362880$$

Quesito 4

La cubica di equazione $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ha come derivata prima la parabola $y'=3ax^2+2bx+c$. L'equazione $y'=0$ presenta le seguenti soluzioni:

- 2 soluzioni reali distinte $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ se $\Delta=b^2-3ac>0$;
- 2 soluzioni reali coincidenti $x_{1,2}=-\frac{b}{3a}$ se $\Delta=b^2-3ac=0$;
- 2 soluzioni complesse coniugate $x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-b^2+3ac}}{3a}$ se $\Delta=b^2-3ac<0$.

Nel caso in cui le soluzioni fossero reali e distinte, la funzione sarebbe:

- se $a>0$
  - crescente in $\left(-\infty,\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)\cup\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a},+\infty\right)$
  - decrescente in $\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a},\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)$
- se $a<0$
  - decrescente in $\left(-\infty,\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)\cup\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a},+\infty\right)$
  - crescente in $\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a},\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)$

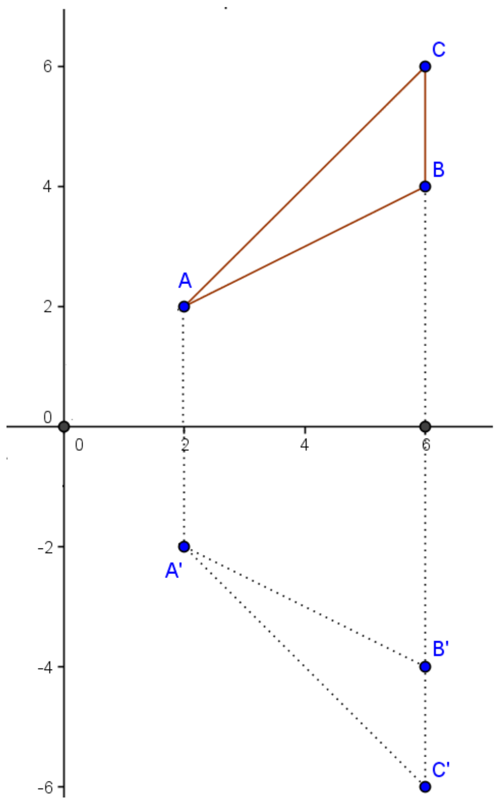
Nel caso $a>0$ la cubica presenterebbe quindi un massimo relativo all'ascissa $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ e un minimo relativo all'ascissa $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$, mentre se $a<0$ un minimo relativo all'ascissa $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ e un massimo relativo all'ascissa

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$. In questi casi la funzione presenterebbe, oltre ai due estremanti suddetti, anche un flesso a tangente obliqua all'ascissa $x_F = -\frac{b}{3a}$.

Se le due soluzioni fossero reali e coincidenti o complesse coniugate, la funzione sarebbe strettamente crescente in tutto il dominio R, per cui non vi sarebbero estremanti in questi casi; in particolare in presenza di soluzioni reali la funzione presenterebbe solo un flesso a tangente orizzontale all'ascissa $x_F = -\frac{b}{3a}$ mentre in presenza di soluzioni complesse coniugate la funzione presenterebbe solo un flesso a tangente obliqua all'ascissa $x_F = -\frac{b}{3a}$.

__Quesito 5__

Si consideri la figura sottostante:



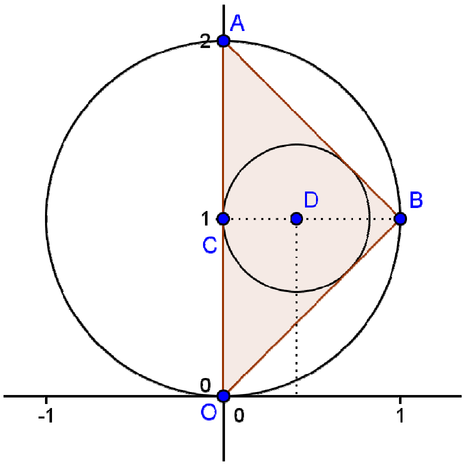
Il volume richiesto è dato dalla differenza tra i volumi dei tronchi di cono AA'C'C e AA'B'B:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot\left(R^2+r^2+Rr\right)-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot\left(R'^2+r'^2+R'r'\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4\cdot(36+4+12)-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4\cdot(16+4+8)=\frac{208}{3}\pi-\frac{112}{3}\pi=\frac{96}{3}\pi=32\pi$$

Quesito 6

Consideriamo la figura sottostante.



L'equazione generica di una circonferenza è

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ o equivalentemente

$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ dove (h,k) è il centro ed R il raggio.

Troviamo l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici O(0,0) , A(0,2) , B(1,1) imponendo il passaggio per i tre punti, utilizzando l'equazione generica $x^2+y^2+ax+by+c=0$:

$\begin{cases} c=0 \\ 2b+c+4=0 \\ a+b+c+2=0 \end{cases} \to \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases}$ cui corrisponde una circonferenza circoscritta di equazione $x^2+y^2-2y=0$.

Per quanto riguarda la circonferenza circoscritta, il raggio è pari al rapporto tra area e semiperimetro, $R=\frac{S}{p}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$ mentre il centro si troverà certamente sulla retta CB essendo quest'ultima bisettrice del triangolo isoscele rettangolo OAB, per cui $D\left(\sqrt{2}-1,1\right)$. L'equazione sarà quindi:

$$\left(x-\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \to x^2+y^2-2x\left(\sqrt{2}-1\right)-2y+1=0$$

Quesito 7

La cubica di equazione $y=x^3+3x^2+3x-7=(x+1)^3-8$ ha le seguenti derivate prima e seconda:

$y'=3(x+1)^2>0\ \forall x\in R-\{-1\}$
$y''=6(x+1)=0\Rightarrow x=-1$

per cui presenta un flesso a tangente orizzontale in $F(-1,-8)$.

Per dimostrare che essa sia simmetrica rispetto ad $F(-1,-8)$, basta provare che applicando la trasformazione $\begin{cases} X=2x_F-x \\ Y=2y_F-y \end{cases} \to \begin{cases} X=-2-x \\ Y=-16-y \end{cases}$ ritroviamo la curva originaria.

Si ha:

$Y=-16-\left\{[(-2-X)+1]^3-8\right\}=-16-(-X-1)^3+8=(X+1)^3-8$ che coincide con la cubica di partenza.

Quesito 8

La funzione $f(x)=\frac{1}{x}-e^x$ ha dominio $D=R-\{0\}$ ed avendo derivata prima $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-e^x$ sempre negativa è strettamente decrescente in tutto il dominio. Inoltre poiché $f\left(\frac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0, f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{3}-\sqrt[4]{e^3}<0$, allora per il teorema degli zeri esiste almeno un punto $\alpha\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ in cui la funzione si annulla; la stretta decrescenza comporta che questo punto è unico.

E' possibile calcolare lo zero attraverso vari metodi. Utilizzeremo il metodo delle tangenti o di Newton-Raphson in $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$. Il valore approssimato lo si ricava ricorsivamente mediante la formula $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n+\frac{x_n-x_n^2e^{x_n}}{1+x_n^2e^{x_n}}=\frac{x_n\left(x_n^2e^{x_n}-x_ne^{x_n}+2\right)}{1+x_n^2e^{x_n}}$ con punto iniziale $x_0=\frac{1}{2}$ in quanto $f(x_0)$ ed $f''(x_0)$ sono concordi. La tabella seguente mostra tutti i passi dell'algoritmo:

n	x_n	$x_{n+1}=\frac{x_n\left(x_n^2e^{x_n}-x_ne^{x_n}+2\right)}{1+x_n^2e^{x_n}}$	$e=\lvert x_n-x_{n-1}\rvert$
0	0,500	0,562	
1	0,562	0,567	0,062
2	0,567	0,567	0,005
3	**0,567**		

Il valore approssimato con due cifre decimali esatte e con la terza stabilizzata sul 7 è quindi $\alpha\approx 0{,}567$.

Quesito 9

Il numero delle possibili combinazioni 5 a 5 dei 13 rappresentanti, è pari a $\binom{13}{5}=\frac{13!}{5!\cdot 8!}=\frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=9\cdot 11\cdot 13=1287$.

La possibili combinazioni di 3 uomini e due donne è pari a $\binom{10}{3}\cdot\binom{3}{2}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}=120\cdot 3=360$ per cui la probabilità richiesta, secondo l'interpretazione frequentista, è pari al numero dei casi favorevoli sul numero dei casi possibili $p=\frac{360}{1287}=27{,}97\%$.

Quesito 10

La probabilità richiesta la si può calcolare come complementare della probabilità che il punto scelto a caso appartenga al rombo, $P(E)=1-P(\overline{E})$ dove $E=\{P \notin rombo\}$ e $\overline{E}=\{P \in rombo\}$. La probabilità $P(\overline{E})$ la si può calcolare come rapporto tra l'area del rombo e quella dell'ellisse, per cui $P(E)=1-P(\overline{E})=1-\frac{A_{Rombo}}{A_{Ellisse}}$. Il rombo ha le diagonali pari rispettivamente a $d_1=2a, d_2=2b$ per cui l'area sarà $A_{Rombo}=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}=2ab$; per il calcolo dell'area dell'ellisse, per simmetria, essa è pari al quadruplo dell'area S del lobo dell'ellisse nel primo quadrante, $A_{Ellisse}=4S$. A tal riguardo, l'ellisse nel primo quadrante è definita dall'equazione in forma esplicita $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; l'area del lobo nel primo quadrante è pari a $S=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; applicando l'integrazione per parti si ha:

$$S=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left[\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a+\frac{b}{a}\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=\left[\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a+\frac{b}{a}\int_0^a \frac{-\left(a^2-x^2\right)+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=\left[\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a-\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx+\frac{b}{a}\int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=\left[\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a-\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx+ab\int_0^a \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx=$$

$$=\left[\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a-\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx+\left[ab\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a \rightarrow$$

$$\rightarrow S=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}+ab\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot\arcsin(1)=\frac{\pi ab}{4}$$

L'area dell'ellisse è quindi $A_{Ellisse}=4S=4\cdot\frac{\pi ab}{4}=\pi ab$, per cui la probabilità richiesta è $P(E)=1-P(\overline{E})=1-\frac{2\cancel{ab}}{\pi\cancel{ab}}=\frac{\pi-2}{\pi}\cong 36{,}34\%$.