ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

SESSIONE SUPPLETIVA

Tema di: MATEMATICA

a. s. 2009-2010

PROBLEMA 1

E' data una circonferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2$. Sul prolungamento del diametro AB, dalla parte di B, si prenda un punto P e da esso si conduca una tangente alla circonferenza.

1. Detti T il punto di tangenza e Q il punto di intersezione di questa tangente con la tangente in A alla circonferenza, si calcoli il rapporto:

$$\frac{\overline{TQ}^2 + \overline{TP}^2}{\overline{AP}^2},$$

espresso in funzione di $x = \overline{BP}$, controllando che risulta :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x}.$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione *f(x)* e se ne tracci il grafico γ.

3. Si calcolino i numeri a, b, c in modo che risulti:

$$\frac{x^2+1}{x^2+2x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2}. \qquad (1)$$

4. Tenendo presente la scomposizione (1), si calcoli l'area della regione piana, limitata da γ, dal suo asintoto orizzontale e dalla retta d'equazione $x = 2$.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, si denoti con Γ_a il grafico della funzione

$$f_a(x) = (x-a)\, e^{2 - \frac{x}{a}}$$

dove a è un parametro reale positivo ed e è il numero di *Nepero*.

1. Si dimostri che, al variare di a, le curve Γ_a tagliano l'asse delle x secondo lo stesso angolo

α. Si determini l'ampiezza di α in gradi e primi sessagesimali.

2. Si dimostri che la tangente a Γ_a nel punto di flesso, descrive, al variare di *a,* un fascio di rette parallele. Si determini l'equazione di tale fascio.

3. Posto $a = 1$, si studi $f_1(x)$ e si tracci Γ_1.

4. Si calcoli l'area $S(k)$ della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ_1, dall'asse x e dalla retta $x = k$, con $k > 1$. Cosa si può dire di $S(k)$ quando $k \to +\infty$?

QUESTIONARIO

1. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

2. Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$.

3. Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale ß, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

4. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

5. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \dfrac{e^x (x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \le x \le 2$.

6. Si determini il punto della parabola $4y = x^2$ più vicino al punto di coordinate (6, -3).

7. Si consideri l'equazione

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0.$$

Si dimostri che essa ammette una soluzione reale x_0 tale che $1 < x_0 < 2$. Avvalendosi di un qualsiasi procedimento iterativo si determini x_0 a meno di 1/100.

8. Nel piano cartesiano Oxy è dato il cerchio C con centro nell'origine e raggio $r = 3$; siano

$P(0, 3)$ e $Q(2, \sqrt{5})$ punti di C. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del quadrilatero mistilineo $PORQ$ (con R proiezione di Q sull'asse x).

9. Siano dati un ottaedro regolare di spigolo l e la sfera in esso inscritta; si scelga a caso un punto all'interno dell'ottaedro. Si determini la probabilità che tale punto risulti interno alla sfera.

10. Un'urna contiene 20 palline, che possono essere rosse o azzurre. Quante sono quelle azzurre, se, estraendo 2 palline senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una pallina azzurra è 27/38 ?

Durata massima della prova: 6 ore.

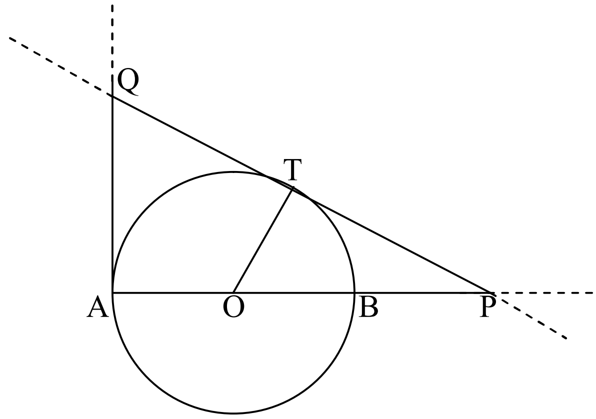
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

Punto 1

Consideriamo la figura di seguito.



Banalmente si ha $\overline{AP}^2 = \left(\overline{AB}+\overline{BP}\right)^2 = (x+2)^2$; applicando il teorema di Pitagora al triangolo OTP si ricava $\overline{TP}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OT}^2 = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$.

Per il teorema delle tangenti a una circonferenza $\overline{AQ} = \overline{TQ}$ per cui applicando il teorema di Pitagora al triangolo AQP si ottiene:

$$\overline{AQ}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{QP}^2 \rightarrow \overline{AQ}^2 + \overline{AP}^2 = \left(\overline{TQ}+\overline{TP}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{AQ}^2 + \overline{AP}^2 = \left(\overline{AQ}+\overline{TP}\right)^2 \rightarrow \overline{AQ}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{TP}^2 + 2\cdot\overline{AQ}\cdot\overline{TP} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{AP}^2 = \overline{TP}^2 + 2\cdot\overline{AQ}\cdot\overline{TP} \rightarrow \overline{AQ} = \frac{\overline{AP}^2 - \overline{TP}^2}{2\cdot\overline{TP}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{AQ} = \frac{(x+2)^2 - \left(x^2+2x\right)}{2\cdot\sqrt{x^2+2x}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}}$$

La funzione richiesta è quindi

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}}\right)^2 + \left(x^2+2x\right)}{(x+2)^2} = \frac{\frac{(x+2)^2}{x^2+2x} + \left(x^2+2x\right)}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(x+2)^2 + x^2\cdot(x+2)^2}{x^2+2x}}{(x+2)^2} = \frac{\frac{(x+2)^2\cdot\left(x^2+1\right)}{x^2+2x}}{(x+2)^2} = \frac{\left(x^2+1\right)}{x^2+2x}$$

Punto 2

Studiamo la funzione $f(x) = \frac{\left(x^2+1\right)}{x^2+2x}$

- *Dominio*: $x^2+2x \neq 0 \rightarrow x \neq -2 \wedge x \neq 0 \rightarrow x \in (-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$;

- *Intersezione asse ascisse*: non ve ne sono in quanto (x^2+1) è una quantità sempre positiva;
- *Intersezione asse ordinate*: non ve ne sono in quanto $x=0$ non appartiene al dominio;
- *Simmetrie*: la funzione non è né pari né dispari;
- *Positività*: $f(x)>0 \rightarrow x^2+2x>0 \rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$;
- *Asintoti verticali*:

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{(x^2+1)}{x^2+2x}=+\infty,\ \lim_{x\to-2^+}\frac{(x^2+1)}{x^2+2x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{(x^2+1)}{x^2+2x}=-\infty,\ \lim_{x\to0^+}\frac{(x^2+1)}{x^2+2x}=+\infty$$

quindi $x=-2, x=0$ sono due asintoti verticali

- *Asintoti orizzontali*: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^2+1)}{x^2+2x}=1$ per cui $y=1$ è asintoto orizzontale destro e sinistro;
- *Asintoti obliqui*: non ve ne sono in quanto la funzione è razionale fratta e la presenza dell'asintoto orizzontale esclude la presenza di quello obliquo;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $f'(x)=\frac{2x(x^2+2x)-(x^2+1)(2x+2)}{(x^2+2x)^2}=\frac{2x^2-2x-2}{(x^2+2x)^2}$ per cui $f'(x)>0\rightarrow\begin{cases}x^2-x-1>0\\ x\neq-2\vee x\neq0\end{cases}\rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$; la funzione presenta un massimo relativo all'ascissa $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ un minimo relativo all'ascissa $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$;
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è

$$f''(x)=\frac{(4x-2)(x^2+2x)^2-(2x^2-2x-2)\cdot2\cdot(x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x)^4}=$$
$$=\frac{(4x-2)(x^2+2x)-2\cdot(2x^2-2x-2)(2x+2)}{(x^2+2x)^3}=\frac{(4x^3+6x^2-4x)-(8x^3-16x-8)}{(x^2+2x)^3}=$$
$$=\frac{-4x^3+6x^2+12x+8}{(x^2+2x)^3}$$

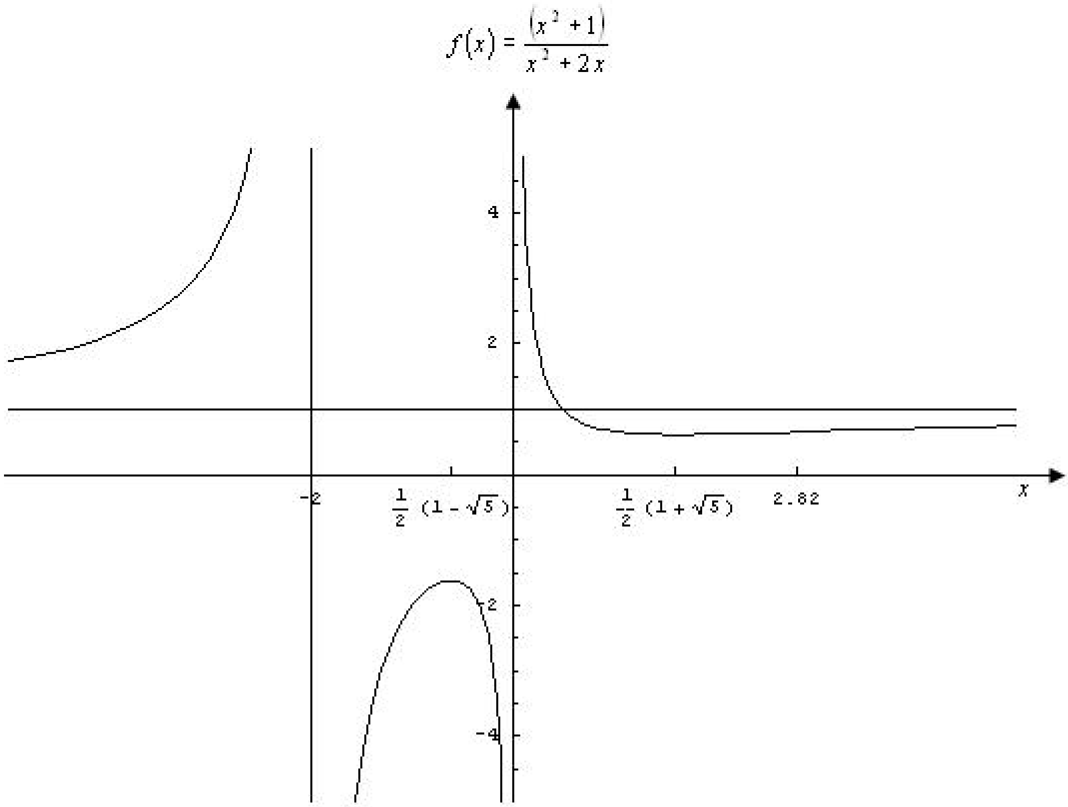
Per ricavare i flessi basta trovare gli zeri della derivata seconda e quindi risolvere l'equazione $g(x)=-4x^3+6x^2+12x+8=0$; in particolare attraverso considerazioni basate sul comportamento agli estremi, sulla crescenza e concavità di $g(x)$ deduciamo che $g(x)$

ammette un solo zero appartenente all'intervallo $(2,3)$: infatti in tale intervallo è strettamente decrescente ed assume valore discorde agli estremi per cui a norma del teorema degli zeri esiste un unico zero in $(2,3)$. Tale zero è ricavabile attraverso uno dei metodi numerici come quello di Newton-Raphson che permette di ricavare ricorsivamente lo zero attraverso la formula $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$ con punto iniziale $x_0 = 3$. Di seguito il metodo in forma tabellare

n	x_n	x_{n+1}	err=$\lvert x_{n+1}-x_n \rvert$
0	3,000	2,833	
1	2,833	2,817	0,167
2	2,817	2,817	0,016
3	2,817	2,817	0,000

Con un errore inferiore a 10^{-2} deduciamo che il flesso è posizionato all'ascissa $x \approx 2,82$.

Il grafico è di seguito presentato:



Punto 3

Effettuando il minimo comune multiplo si ha:

$$f(x) = \frac{(x^2+1)}{x^2+2x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2} \rightarrow \frac{x^2+1}{x^2+2x} = \frac{ax^2 + (2a+b+c)x + 2b}{x^2+2x}$$

e sfruttando il principio di identità dei polinomi ricaviamo il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b+c=0 \\ 2b=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \rightarrow f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x}=1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{5}{2(x+2)}$.

Punto 4

L'asintoto orizzontale interseca la curva in un punto la cui ascissa si ricava risolvendo l'equazione $\dfrac{(x^2+1)}{x^2+2x}=1$ da cui ricaviamo $x^2+1=x^2+2x \rightarrow x=\dfrac{1}{2}$; il punto di intersezione è allora $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

L'area richiesta è pari a:

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[1-\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{5}{2(x+2)}\right)\right]dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[-\frac{1}{2x}+\frac{5}{2(x+2)}\right]dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{5}{2}\ln|x+2|\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{5}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\ln\frac{5}{2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{5}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{2}\ln\frac{5}{2}=-\ln 2+\frac{5}{2}\ln\frac{8}{5}=-\ln 2+\ln\frac{128\sqrt{10}}{125}=\ln\frac{64\sqrt{10}}{125}$$

PROBLEMA 2

Punto 1

Le curve della famiglia $f_a(x)=(x-a)e^{2-\frac{x}{a}}$ intersecano l'asse delle ascisse in $(a,0)$. La tangente in $(a,0)$ ha equazione $y=m(x-a)$ dove $m=f_a^{'}(a)$; la derivata prima è $f_a^{'}(x)=e^{2-\frac{x}{a}}+(x-a)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot e^{2-\frac{x}{a}}=e^{2-\frac{x}{a}}\cdot\left[1-\left(\frac{x-a}{a}\right)\right]=\left(2-\frac{x}{a}\right)\cdot e^{2-\frac{x}{a}}$ per cui $m=f_a^{'}(a)=e$ da cui deduciamo che le curve Γ_a tagliano l'asse delle x secondo lo stesso angolo $\alpha=\arctan(m)=\arctan(e)$.

Punto 2

La derivata seconda della famiglia $f_a(x)=(x-a)e^{2-\frac{x}{a}}$ è $f_a^{''}(x)=\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot e^{2-\frac{x}{a}}+\left(2-\frac{x}{a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot e^{2-\frac{x}{a}}=\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot e^{2-\frac{x}{a}}\cdot\left[1+\left(2-\frac{x}{a}\right)\right]=\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot e^{2-\frac{x}{a}}\cdot\left(3-\frac{x}{a}\right)$ e si annulla in $x=3a$ in cui la famiglia di curve presenta un flesso a tangente obliqua. La tangente inflessionale in $\left(3a,\frac{2a}{e}\right)$ ha equazione $y=m(x-3a)+\frac{2a}{e}$ dove $m=f_a^{'}(3a)=-\frac{1}{e}$ per cui l'equazione è $y=-\frac{1}{e}(x-3a)+\frac{2a}{e}=-\frac{x}{e}+\frac{5a}{e}$ che rappresenta un fascio di rette parallele di coefficiente angolare $m=-\frac{1}{e}$.

Punto 3

Studiamo la funzione $f_1(x)=(x-1)\cdot e^{2-x}$

- *Dominio*: R;
- *Intersezione asse ascisse*: $f_1(x)=(x-1)\cdot e^{2-x}=0\rightarrow x=1$
- *Intersezione asse ordinate*: $x=0\rightarrow f_1(0)=-e^2$
- *Simmetrie*: la funzione non è né pari né dispari
- *Positività*: $f_1(x)=(x-1)\cdot e^{2-x}>0\rightarrow(x-1)>0\rightarrow x>1$;
- *Asintoti verticali*: non ve ne sono in quanto il dominio è R;
- *Asintoti orizzontali*:

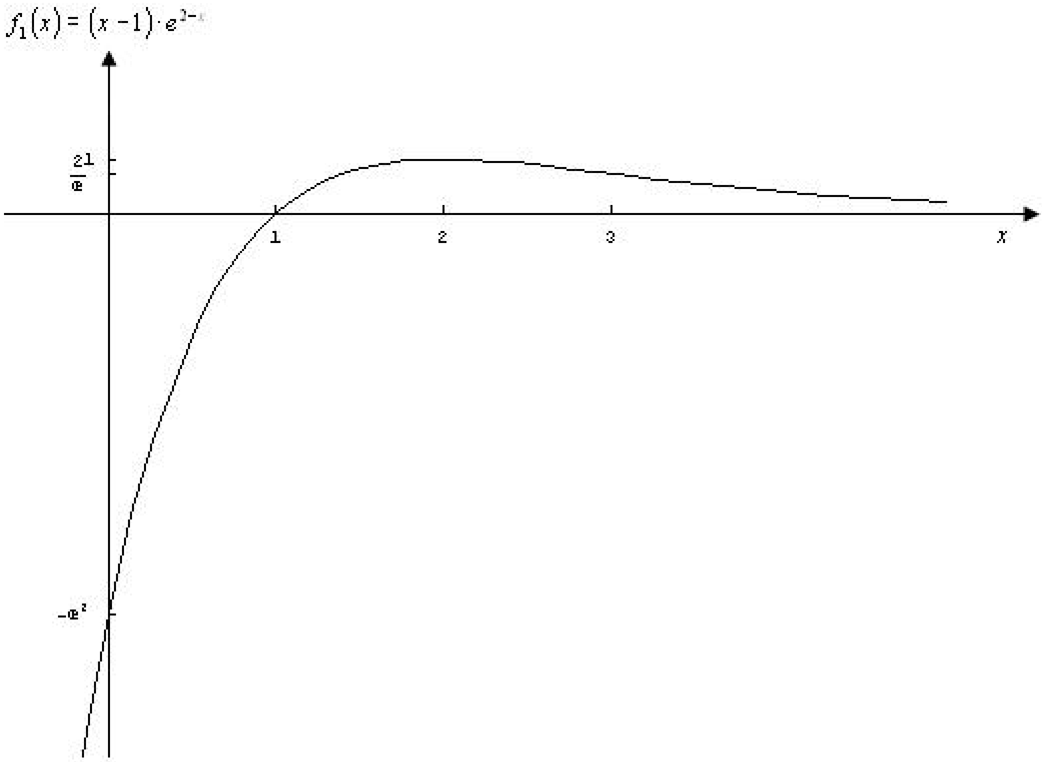
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)}{e^{x-2}} = \text{F.I}\frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{De L'Hospital}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)}{e^{x-2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-2}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)\cdot e^{2-x} = +\infty$$

quindi $y=0$ è asintoto orizzontale destro;

- *Asintoti obliqui*: non esistono in quanto $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\infty$;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $f_1^{'}(x)=(2-x)\cdot e^{2-x}$ per cui $f_1^{'}(x)>0 \to x<2$ cioè la funzione è strettamente crescente in $(-\infty,2)$ e strettamente decrescente in $(2,+\infty)$; il punto $\mathrm{M}(2,1)$ è di massimo relativo;
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $f_1^{''}(x)=e^{2-x}\cdot(x-3)$ per cui $f_1^{''}(x)>0 \to x>3$ per cui la funzione presenta concavità verso l'alto in $(3,+\infty)$ e verso il basso in $(-\infty,3)$; la funzione presenta quindi un flesso a tangente obliqua $\mathrm{F}=\left(3,\frac{2}{e}\right)$ con tangente inflessionale di equazione $y=-\frac{x}{e}+\frac{5}{e}$.

Di seguito il grafico:



<u>*Punto 4*</u>

L'area richiesta è pari a $S(k)=\int_1^k (x-1)e^{2-x}dx$. Applicando l'integrazione per parti si ha:

$$S(k)=\int_1^k (x-1)e^{2-x}dx=\left[-(x-1)e^{2-x}\right]_1^k+\int_1^k e^{2-x}dx=\left[-(x-1)e^{2-x}\right]_1^k+\left[-e^{2-x}\right]_1^k=\left[-xe^{2-x}\right]_1^k=-ke^{2-k}+e$$

In particolare $\lim_{k\to+\infty} S(k)=e-\lim_{k\to+\infty} ke^{2-k}=e-\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{e^{k-2}}$. Per il limite $\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{e^{k-2}}$, essendo una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, possiamo applicare il teorema di De L'Hospital e si ha: $\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{e^{k-2}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{e^{k-2}}=0$ per cui $\lim_{k\to+\infty} S(k)=e-\lim_{k\to+\infty} ke^{2-k}=e-\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{e^{k-2}}=e$.

QUESTIONARIO

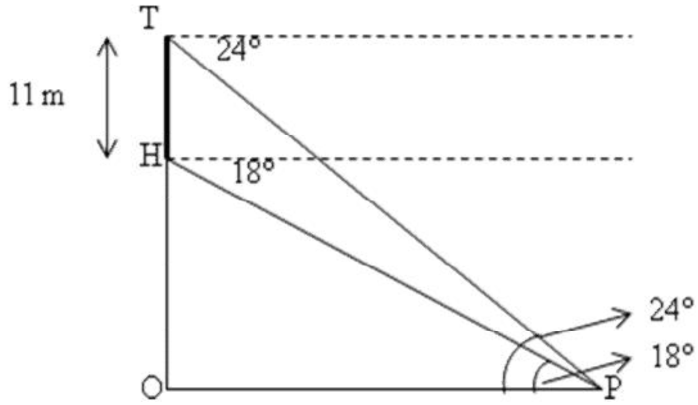
Quesito 1

Consideriamo la figura a lato.

Dobbiamo calcolare la lunghezza del segmento PO. Applicando il teorema dei triangoli rettangoli ai triangoli POT e OH si ha la relazione

$\overline{PO} \cdot \tan(24°) - \overline{PO} \cdot \tan(18°) = 11$ da cui

$\overline{PO} \cong 91\,\text{m}$



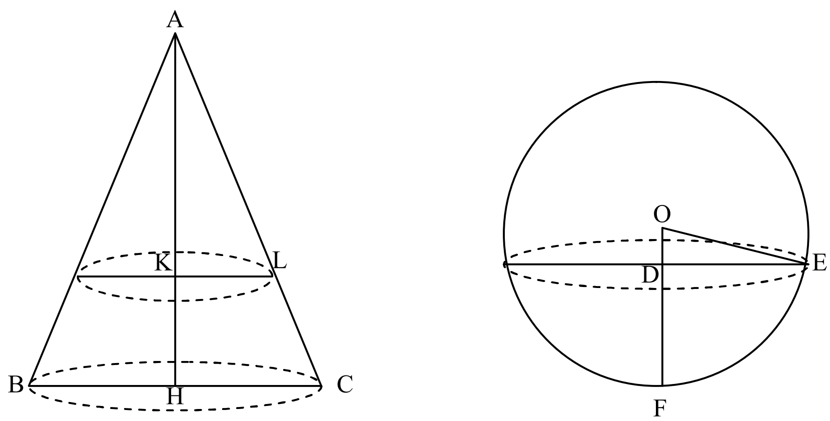
Quesito 2

Il limite richiesto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per cui possiamo applicare il teorema di de l'Hospital: $\lim_{x\to 0} \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\ln 3 \cdot 3^{3x} - \ln a \cdot a^x}{\ln 6 \cdot 6^x - \ln 5 \cdot 5^x} = \frac{3\ln 3 - \ln a}{\ln 6 - \ln 5} = \frac{\ln \frac{27}{a}}{\ln \frac{6}{5}}$. Imponendo

$\lim_{x\to 0} \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x} = 2$ si ha $\frac{\ln \frac{27}{a}}{\ln \frac{6}{5}} = 2 \to \ln \frac{27}{a} = 2\ln \frac{6}{5} \to \ln \frac{27}{a} = \ln \frac{36}{25} \to \frac{27}{a} = \frac{36}{25} \to a = \frac{75}{4}$.

Quesito 3

Si consideri la figura seguente:



Indichiamo con x, $0 < x < 2r$, la distanza tra piani α e β.

Le intersezioni del piano β con il cono e la sfera sono due circonferenze rispettivamente di raggio $R_C = \overline{KL}$ e $R_S = \overline{DE}$. La somma delle aree delle sezioni è quindi $S = \pi \cdot R_C^2 + \pi \cdot R_S^2$. Calcoliamo ora i due raggi:

- Raggio R_C

  I triangolo AKL e AHC sono simili essendo entrambi rettangoli con un angolo in comune per cui vale la seguente proporzione tra lati omologhi: $\overline{AK} : \overline{KL} = \overline{AH} : \overline{HC}$ da cui $\overline{KL} = \frac{\overline{AK} \cdot \overline{HC}}{\overline{AH}} = \frac{(2r - x) \cdot r}{2r} = \left(r - \frac{x}{2}\right)$ per cui l'area della circonferenza di raggio $\overline{KL} = \left(r - \frac{x}{2}\right)$ è $A_C = \pi \cdot R_C^2 = \pi \cdot \left(r - \frac{x}{2}\right)^2$;

- Raggio R_S

  Il triangolo ODE è rettangolo per cui $R_S = \overline{DE} = \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{r^2 - (r - x)^2} = \sqrt{2rx - x^2}$ per cui l'area della circonferenza di raggio $R_S = \overline{DE} = \sqrt{2rx - x^2}$ è $A_S = \pi \cdot R_S^2 = \pi \cdot (2rx - x^2)$.

La somma delle aree è quindi $S(x) = \pi \cdot \left(r - \frac{x}{2}\right)^2 + \pi \cdot (2rx - x^2) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + rx + r^2\right)$ con $0 < x < 2r$. Notiamo che la funzione $S(x)$ è una parabola con concavità verso il basso che presenta il massimo nell'ascissa del vertice $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{r}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}r$; quindi la somma delle due aree è massima per $x_V = \frac{2}{3}r$ e vale $S\left(\frac{2}{3}r\right) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}r^2 + r \cdot \frac{2}{3}r + r^2\right) = \frac{4}{3}\pi r^2$.

Alternativamente possiamo proseguire mediante derivazione: la derivata prima della funzione $S(x)$ è $S'(x) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{2}x + r\right)$ per cui $S'(x) > 0 \rightarrow x < \frac{2}{3}r$ da cui deduciamo che $S(x)$ è strettamente crescente in $\left(0, \frac{2}{3}r\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{2}{3}r, 2r\right)$; inoltre $S''(x) = -\frac{3}{2}\pi < 0$ per cui $x = \frac{2}{3}r$ è l'ascissa del massimo.

<u>*Quesito 4*</u>

Gli zeri dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sono $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; la derivata prima di $f(x)=ax^2+bx+c$ è $f'(x)=2ax+b$ per cui

$$f'(x_1)=2a\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+b=-\sqrt{b^2-4ac}$$

$$f'(x_2)=2a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+b=+\sqrt{b^2-4ac}$$

da cui deduciamo che $f'(x_1)+f'(x_2)=0$.

Per dare un'interpretazione geometrica al risultato ottenuto riscriviamo la somma $[f'(x_1)+f'(x_2)]$: essa è pari a $f'(x_1)+f'(x_2)=(2ax_1+b)+(2ax_2+b)=2a(x_1+x_2)+2b$ e imponendo che sia nulla otteniamo $(x_1+x_2)=-\frac{b}{a}$ o equivalentemente $\frac{(x_1+x_2)}{2}=-\frac{b}{2a}$. La relazione appena ricavata ci dice che la semisomma delle soluzioni è pari a $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ che è l'ascissa del vertice; in altri termini gli zeri della parabola sono simmetrici rispetto alla retta $x=-\frac{b}{2a}$ coincidente con l'asse di simmetria della parabola.

<u>*Quesito 5*</u>

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a,b]$ è $V_M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Nel caso in esame $V_M=\int_1^2\left[\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right]dx$; applicando l'integrazione per parti si ha

$$V_M=\int_1^2\left[\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right]dx=\left[-\frac{e^x(x-1)}{x}\right]_1^2+\int_1^2\left[\frac{1}{x}\cdot\left(x\cdot e^x+e^x-e^x\right)\right]dx=$$

$$=-\frac{e^2}{2}+\int_1^2 e^x dx=-\frac{e^2}{2}+e^2-e=\frac{e^2}{2}-e=\frac{e^2-2e}{2}$$

<u>*Quesito 6*</u>

Il generico punto P della parabola di equazione $y=\frac{x^2}{4}$ ha coordinate $\mathrm{P}\left(x,\frac{x^2}{4}\right)$; la massimizzazione della distanza di P da Q(6,-3) è equivalente alla massimizzazione del quadrato della distanza stessa; in particolare $\overline{\mathrm{PQ}}^2=f(x)=(x-6)^2+\left(\frac{x^2}{4}+3\right)^2=\frac{x^4}{16}+\frac{5x^2}{2}-12x+45$.

La massimizzazione la effettuiamo mediante derivazione; la derivata prima è $f'(x)=\frac{x^3}{4}+5x-12$

da cui notiamo che $f'(2)=0$ per cui essa è divisibile per $(x-2)$. In particolare possiamo scomporre la derivata prima come $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+24)}{4}$; poiché $(x^2+2x+24)>0\ \forall x\in R$ si ha $f'(x)>0 \rightarrow x>2$ cioè la funzione è strettamente crescente in $(2,+\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty,2)$ e in particolare assume valore minimo in $x=2$. In conclusione il punto a distanza minima da Q(6,-3) è P(2,1) e la distanza minima vale $\overline{PQ}=4\sqrt{2}$.

Quesito 7

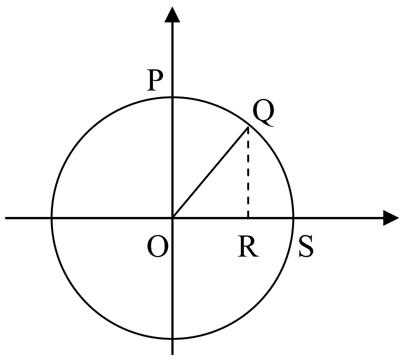
La cubica $f(x)=x^3-3x^2+6x-6$ ha come derivata prima $f'(x)=3(x^2-2x+2)$ da cui deduciamo che essa è strettamente crescente in tutto il dominio R; inoltre poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ deduciamo che esiste un unico zero in tutto il dominio. In particolare, essendo $f(1)=-2<0, f(2)=2>0$, deduciamo che l'unico zero appartiene all'intervallo (1,2). Esso è calcolabile mediante uno dei qualsiasi metodi numerici, come quello delle tangenti o di Newton-Raphson che permette di ricavare ricorsivamente lo zero attraverso la formula $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ con punto iniziale $x_0=2$. Di seguito il metodo in forma tabellare

n	x_n	x_{n+1}	err=$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
0	2,000	1,667	
1	1,667	1,598	0,333
2	1,598	1,596	0,068
3	1,596	1,596	0,002

Con un errore inferiore a 10^{-2} deduciamo che lo zero è $x\approx 1{,}60$.

Quesito 8

Si consideri la figura seguente.



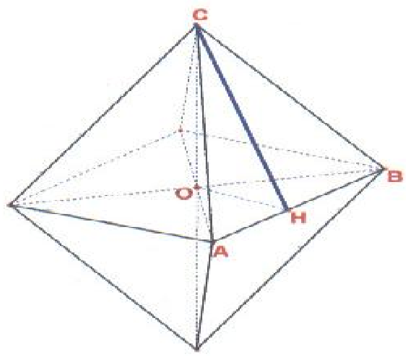
Il volume richiesto lo si calcola per differenza tra il volume del solido generato dalla rotazione del quarto di circonferenza POS cui va sottratto il volume del solido generato dalla rotazione dell'arco circolare QS . Il volume del solido generato dalla rotazione del quarto di circonferenza è pari a $V=\pi\int_0^3\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2dx=\pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=18\pi$, mentre il volume del solido generato dalla rotazione dell'arco circolare QS di equazione $y=\sqrt{9-x^2}$ in [2,3] è pari a

$V_1 = \pi \int_2^3 \left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 dx = \pi \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{8}{3}\pi$; di conseguenza il volume richiesto è pari a $V_{PORQ} = V - V_1 = 18\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{46}{3}\pi$.

Alternativamente avremmo potuto calcolare il volume direttamente come $V_{PORQ} = \pi \int_0^2 \left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 dx = \pi \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{46}{3}\pi$.

Quesito 9

Consideriamo l'ottaedro a lato.



Il raggio della sfera inscritta corrisponde all'altezza del triangolo rettangolo COH relativa alla base *CH.* L'altezza CH è pari a $\overline{CH} = l\frac{\sqrt{3}}{2}$ mentre $\overline{OH} = \frac{l}{2}$ per cui $\overline{CO} = l\frac{\sqrt{2}}{2}$; l'area del triangolo COH è $S = \frac{\overline{OH} \cdot \overline{CO}}{2} = l^2\frac{\sqrt{2}}{8}$ da cui deduciamo che il raggio della sfera inscritta è $r = \frac{2S}{\overline{CH}} = \frac{l^2\frac{\sqrt{2}}{4}}{l\frac{\sqrt{3}}{2}} = l\frac{\sqrt{6}}{6}$. Il volume della sfera inscritta è $V_S = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\sqrt{6}}{27}\pi l^3$ mentre quello dell'ottaedro è pari al doppio del volume di una delle due piramidi componenti. Il volume di quest'ultima è $V_P = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{A_b \cdot \overline{CO}}{3} = l^3\frac{\sqrt{2}}{6}$ per cui il volume dell'ottaedro è $V_O = l^3\frac{\sqrt{2}}{3}$. La probabilità che il punto appartenga alla sfera è dato dal rapporto tra i volumi della sfera e dell'ottaedro e cioè $p = \frac{V_S}{V_O} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{27}\pi l^3}{l^3\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi \cong 60{,}5\%$.

Quesito 10

Indichiamo con x il numero di palline rosse; di conseguenza il numero di palline azzurre è $(20-x)$. Estratte due palline senza reimmissione della prima, la probabilità di ottenere almeno una pallina azzurra è pari al complemento della probabilità di ottenere due palline rosse, cioè

$\Pr(\text{almeno } 1 \text{ pallina azzurra}) = 1 - \Pr(2 \text{ palline rosse}) = 1 - \frac{x}{20} \cdot \frac{x-1}{19} = \frac{380 - x^2 + x}{380}$. Imponendo $\Pr(\text{almeno } 1 \text{ pallina azzurra}) = \frac{27}{38}$ si ha $\frac{380 - x^2 + x}{380} = \frac{27}{38} \to 380 - x^2 + x = 270 \to x^2 - x - 110 = 0 \to x = \frac{1 \pm 21}{2} \to x = 11 \vee x = -10$.

Scartando la soluzione negativa, il numero di palline rosse deve essere 11 e di conseguenza il numero di quelle azzurre 9 per assicurare che la probabilità di ottenere almeno una pallina azzurra estraendone 2 senza reimmissione della prima sia $\frac{27}{38}$.