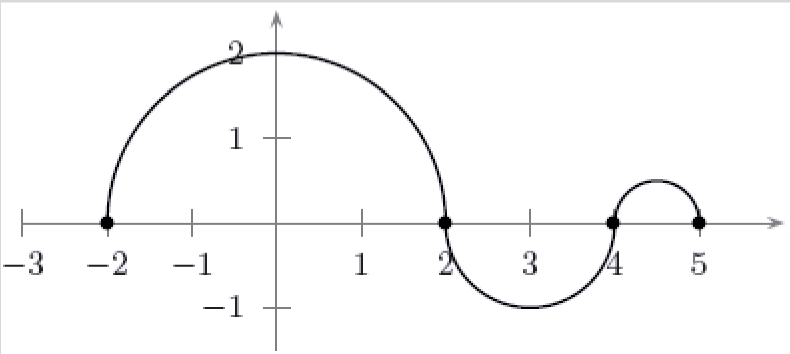
PROBLEMA1

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \le x \le 5$ essendo g la derivata di una funzione *f*. Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in $(0,0),(3,0),\left(\frac{9}{2},0\right)$ e raggi rispettivi $2,1,\frac{1}{2}$.



1. Si scriva un'espressione analitica di $g(x)$. Vi sono punti in cui $g(x)$ non è derivabile? Se sì, quali sono? E perchè?
2. Per quali valori di *x*, $-2 < x < 5$, la funzione *f* presenta un massimo o un minimo relativo?
Si illustri il ragionamento seguito.

3. Se $f(x) = \int_{-2}^{x} g(t)dt$, si determini *f*(4) e *f*(1).

4. Si determinino i punti in cui la funzione f ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di $f(x)$? Qual è l'andamento qualitativo di $f(x)$?

RISOLUZIONE

Punto 1

L'equazione di una circonferenza di centro $C(a,b)$ e raggio R è $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ che

in forma esplicita diventa $y=\begin{cases} b+\sqrt{R^2-(x-a)^2} & \text{se } y>b \\ b-\sqrt{R^2-(x-a)^2} & \text{se } y<b \end{cases}$.

Nel caso in esame le tre semicirconferenze hanno le seguenti espressioni analitiche:

Semicirconferenza di centro $C_1(0,0)$ e raggio $R_1=2$

$y=\sqrt{4-x^2}$;

Semicirconferenza di centro $C_2(3,0)$ e raggio $R_2=1$

$y=-\sqrt{1-(x-3)^2}=-\sqrt{-x^2+6x-8}$;

Semicirconferenza di centro $C_3\left(\frac{9}{2},0\right)$ e raggio $R_3=\frac{1}{2}$

$y=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{-x^2+9x-20}$;

Di conseguenza la funzione $g(x)$ è

$$g(x)=\begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{se } -2\le x\le 2 \\ -\sqrt{-x^2+6x-8} & \text{se } 2<x\le 4 \\ \sqrt{-x^2+9x-20} & \text{se } 4<x\le 5 \end{cases}$$

La derivata della funzione $g(x)$ è

$$g'(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} & \text{se } -2<x<2 \\ \dfrac{x-3}{\sqrt{-x^2+6x-8}} & \text{se } \ 2<x<4 \\ \dfrac{9-2x}{2\sqrt{-x^2+9x-20}} & \text{se } \ 4<x<5 \end{cases}$$

Calcoliamo il valore delle derivate nei punti $x=-2, x=2, x=4, x=5$:

$$\lim_{x\to -2^+} g'(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} g'(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} g'(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{\sqrt{-x^2+6x-8}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-} g'(x)=\lim_{x\to 4^-}\frac{x-3}{\sqrt{-x^2+6x-8}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} g'(x)=\lim_{x\to 4^+}\frac{9-2x}{2\sqrt{-x^2+9x-20}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 5^-} g'(x)=\lim_{x\to 5^-}\frac{9-2x}{2\sqrt{-x^2+9x-20}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

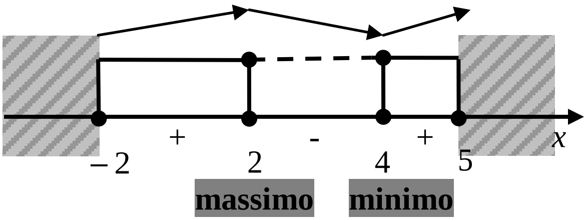
Quindi la funzione $g(x)$ non è derivabile nei punti $x=-2, x=2, x=4, x=5$.

Punto 2

Gli estremi relativi della funzione $f(x)$ sono da ricercare negli zeri della funzione $g(x)$, derivata prima di $f(x)$. Nell'intervallo $(-2,5)$ le ascisse degli estremi relativi sono $x=2, x=4$.

In particolare poichè $g(x)$ è positiva in $(-2,2)$ e negativa in $(2,4)$ deduciamo che $x=2$ è ascissa di massimo relativo; analogamente poichè $g(x)$ è negativa in $(2,4)$ e positiva in $(4,5)$ deduciamo che $x=4$ è ascissa di minimo relativo.

A lato il quadro dei segni che riassume quanto detto.



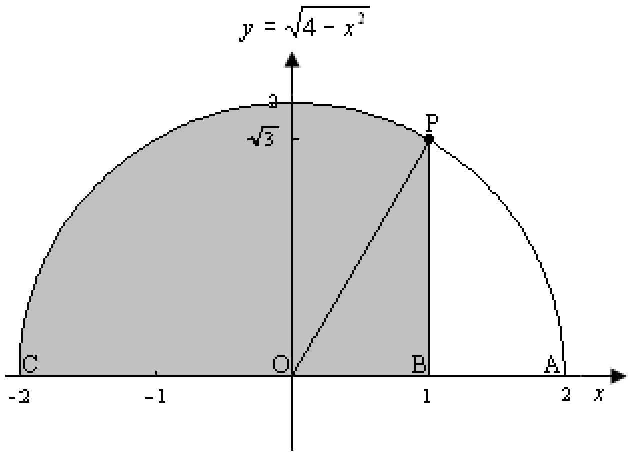
Punto 3

La funzione $f(x)=\int_{-2}^{x} g(t)dt$ rappresenta l'area sottesa dalla funzione $g(t)$ nell'intervallo $[-2,x]$ con $x\in[-2,5]$.

Procediamo al calcolo di $f(4)=\int_{-2}^{4} g(t)dt$. Il valore è pari alla somma algebrica tra le aree delle due semicirconferenze di centro $C_1(0,0)$ e raggio $R_1=2$ e di centro $C_2(3,0)$ e raggio $R_2=1$:

$$f(4)=\int_{-2}^{4} g(t)dt=\frac{1}{2}\cdot\left(\pi\cdot 2^2\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\pi\cdot 1^2\right)=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

Procediamo al calcolo di $f(1)=\int_{-2}^{1} g(t)dt$. Tale integrale corrisponde all'area in grigio nella figura sottostante ed è calcolable in tre modi alternativi:



1. Differenza tra l'area della semicirconferenza (che vale 2π) e l'area del triangolo mistilineo APB; quest'ultima è pari all'area del settore circolare AOP meno l'area del triangolo OBP.

I punto O, B, A, P hanno rispettivamente coordinate $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{B}(1,0), \mathrm{A}(2,0), \mathrm{P}(1,\sqrt{3})$; l'angolo $\alpha=\mathrm{P\hat{O}A}$ di apertura del settore circolare AOP misura $\alpha=\arctan\left(\frac{\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{OB}}}\right)=\arctan(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$.

L'area del settore circolare AOP di ampiezza $\alpha=\frac{\pi}{3}$ e raggio $\mathrm{R}_1=2$ è $S(\mathrm{A\widehat{O}P})=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\mathrm{R}_1^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 4=\frac{2}{3}\pi$ mentre l'area del triangolo OBP è $S(\mathrm{OBP})=\frac{\overline{\mathrm{OB}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}}{2}=\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, per cui

$$f(1)=\int_{-2}^{1} g(t)dt=2\pi-\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2};$$

2. Poiché $\alpha=\mathrm{P\hat{O}A}=\frac{\pi}{3}$ si ha $\mathrm{P\hat{O}C}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ per cui $f(1)=\int_{-2}^{1} g(t)dt$ è pari alla somma dell'area di un terzo di cerchio di

raggio $R_1 = 2$ e dell'area del triangolo OBP, cioè $f(1) = \int_{-2}^{1} g(t)dt = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Attraverso il calcolo esplicito dell'integrale definito; applicando l'integrazione per parti all'integrale $\int g(t)dt = \int \sqrt{4-t^2}\,dt$ si ha:

$$\int \sqrt{4-t^2}\,dt = t\sqrt{4-t^2} + \int \frac{t^2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = t\sqrt{4-t^2} + \int \frac{-\left(4-t^2\right)+4}{\sqrt{4-t^2}}\,dt =$$

$$= t\sqrt{4-t^2} + \int \frac{4}{\sqrt{4-t^2}}\,dt - \int \sqrt{4-t^2}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{4-t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + \int \frac{2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + 2\int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + 2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right) + \mathrm{C}\ \ (\text{costante})$$

Il valore richiesto è quindi pari a

$$f(1) = \int_{-2}^{1} g(t)dt = \left[\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + 2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \left[-2\arcsin(1)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\arcsin(1) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{6} + 2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} + \pi =$$

$$= \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Punto 4

I flessi sono da ricercare nei punti in cui si annulla la derivata seconda e quindi nei punti critici della funzione $g(x)$, derivata prima di $f(x)$. Quindi $f''(x)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=3 \vee x=\frac{9}{2}$. Tali flessi sono a tangente obliqua.
In generale non è possibile definire il segno di una funzione a partire dalla conoscenza della derivata prima, in quanto le derivate differicono per una costante; tuttavia se assumiamo come al Punto 3 $f(x)=\int_{-2}^{x} g(t)dt$ con $x \in [-2,5]$, allora osserviamo che $f(x) \geq 0$ in quanto in $[-2,5]$ $f(x)=\int_{-2}^{x} g(t)dt$ rappresenta l'area sottesa al grafico di $g(x)$.
Con questa assunzione si ha:

$$f(-2)=\int_{-2}^{-2} g(t)dt=0;$$

$$f(-1)=\int_{-2}^{-1} g(t)dt=\left[\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2}+2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_{-2}^{-1}=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+2\arcsin(1)=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

alternativamente per simmetria

$$f(-1)=2\pi-f(1)=2\pi-\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$f(0)=\int_{-2}^{0} g(t)dt=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=\pi$ cioè pari all'area di un quarto di circonferenza di raggio $R_1=2$;

$f(1)=\int_{-2}^{1} g(t)dt=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$ come calcolato al Punto 3;

$f(2)=\int_{-2}^{2} g(t)dt=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=2\pi$ cioè pari all'area della semicirconferenza di centro $C_1(0,0)$ e raggio $R_1=2$;

$f(3)=\int_{-2}^{3} g(t)dt=\int_{-2}^{2} g(t)dt+\int_{2}^{3} g(t)dt=2\pi-\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi$ cioè pari alla somma algebrica tra le aree della semicirconferenza di centro $C_1(0,0)$ e raggio $R_1=2$ e di un quarto di circonferenza di centro $C_2(3,0)$ e raggio $R_2=1$:

$f(4)=\int_{-2}^{4} g(t)dt=\frac{3}{2}\pi$ come calcolato al Punto 3;

$$f\left(\frac{9}{2}\right)=\int_{-2}^{\frac{9}{2}} g(t)dt=\int_{-2}^{2} g(t)dt+\int_{2}^{4} g(t)dt+\int_{4}^{\frac{9}{2}} g(t)dt=2\pi-\frac{1}{2}\pi 1^2+\frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=$$

$$=2\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{16}=\frac{25}{16}\pi$$

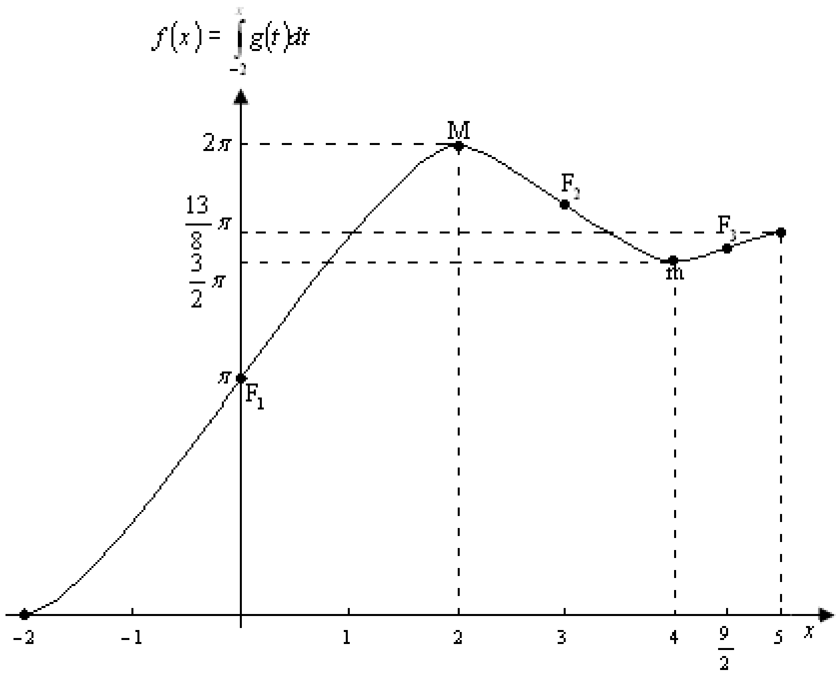
cioè pari alla somma algebrica tra le aree della semicirconferenza di centro $C_1(0,0)$ e raggio $R_1=2$, della semicirconferenza di centro $C_2(3,0)$ e raggio $R_2=1$ e di un quarto di circonferenza di centro $C_3\left(\frac{9}{2},0\right)$ e raggio $R_3=\frac{1}{2}$;

$$f(5)=\int_{-2}^{5} g(t)dt=\int_{-2}^{2} g(t)dt+\int_{2}^{4} g(t)dt+\int_{4}^{5} g(t)dt=2\pi-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=2\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{13}{8}\pi$$

cioè pari alla somma algebrica tra le aree delle semicirconferenze di centro $C_1(0,0)$ e raggio $R_1 = 2$, di centro $C_2(3,0)$ e raggio $R_2 = 1$ e di centro $C_3\left(\frac{9}{2},0\right)$ e raggio $R_3 = \frac{1}{2}$.

$f(x)$ è strettamente crescente in $(-2,2)\cup(4,5)$;
$f(x)$ è strettamente decrescente in $(2,4)$;
$f(x)$ presenta un massimo relativo in $M(2,2\pi)$;
$f(x)$ presenta un minimo relativo in $m\left(4,\frac{3}{2}\pi\right)$;
$f(x)$ presenta tre flessi in $F_1(0,\pi), F_2\left(3,\frac{7}{4}\pi\right), F_3\left(\frac{9}{2},\frac{25}{16}\pi\right)$
a tangenti oblique rispettivamente di equazioni
$t_{F_1} : y = 2x+\pi, t_{F_2} : y = -x+\frac{7\pi+12}{4}, t_{F_3} : y = \frac{x}{2}+\frac{25\pi-36}{16}$.



PROBLEMA2

Nel piano riferito ad un sistema *Oxy* di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni: $y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.

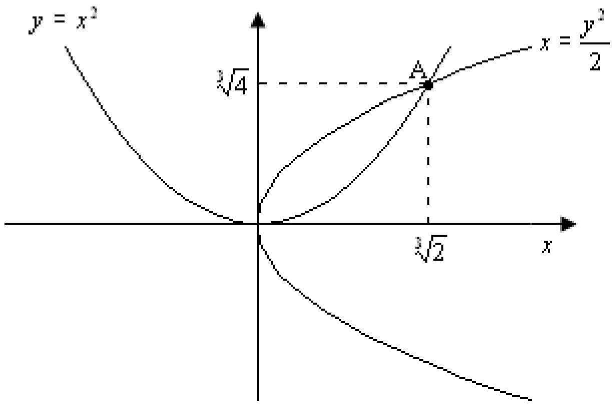
1. Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con *A* il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine *O*.
2. L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2}
3. Sia D la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi *O* e *A*. Si determini la retta *r*, parallela all'asse *x*, che stacca su D il segmento di lunghezza massima.
4. Si consideri il solido W ottenuto dalla rotazione di D intorno all'asse *x*. Se si taglia W con piani ortogonali all'asse *x*, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di W.

RISOLUZIONE

Punto 1

La parabola di equazione $x = \frac{y^2}{2}$ ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle ascisse, vertice in $O(0,0)$ e fuoco di coordinate $F_1\left(\frac{1-\Delta}{4a}, 0\right)$ cioè $F_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e direttrice di equazione $x = -\frac{1}{2}$; la parabola di equazione $y = x^2$ ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate, vertice in $O(0,0)$ e fuoco di coordinate $F_2\left(0, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ cioè $F_2\left(0, \frac{1}{4}\right)$ e direttrice di equazione $y = -\frac{1}{4}$.

Le intersezioni tra le due parabole si ricavano dal sistema $\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2} \\ y = x^2 \end{cases}$ da cui si ricava l'equazione risolvente



$x = \dfrac{x^4}{2} \to x^4 - 2x = 0 \to x\left(x^3 - 2\right) = 0 \to x = 0 \vee x = \sqrt[3]{2}$ per cui il punto A diverso dall'origine $\mathrm{O}(0,0)$ ha coordinate $\mathrm{A}\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right)$.
Il grafico di seguito mostra le due parabile e le relative intersezioni in un unico riferimento cartesiano *Oxy*.

Punto 2

Il numero $\sqrt[3]{2}$ è legato al problema della duplicazione del cubo che assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della quadratura del cerchio, uno dei tre problemi classici della geometria greca. Il problema della duplicazione del cubo è giunto a noi sotto forma di mito. La prima testimonianza in merito è una lettera di Eratostene al re Tolomeo III e si narra di un antico tragico che, mettendo in scena il re Minosse al cospetto del sepolcro in costruzione, di forma cubica, del re Glauco, disse: «piccolo sepolcro per un re: lo si

faccia doppio conservandone la forma; si raddoppino, pertanto, tutti i lati». Eratostene, dopo aver rilevato che l'ordine dato era erroneo, perché raddoppiando i lati di un cubo se ne ottiene un altro con volume otto volte maggiore, riferisce che nacque tra gli studiosi il cosiddetto "problema della duplicazione del cubo".
La seconda testimonianza, conosciuta come Problema di Delo, è dell'espositore Teone di Smirne. Egli, citando Eratostene, riporta che gli abitanti di Delo, avendo interrogato l'oracolo di Apollo sul modo di liberarsi dalla peste, avessero ricevuto l'ordine di costruire un altare, di forma cubica, dal volume doppio rispetto a quello esistente, cioè un altare di lato *L* tale che $L^3 = 2 \cdot l^3$ con *l* lato dell'altare di partenza.
Per approssimare il numero $\sqrt[3]{2}$ possiamo applicare il metodo delle tangenti (detto anche di Newton-Raphson) o il metodo di bisezione per trovare la radice della funzione $f(x) = x^3 - 2$.
Applichiamo il metodo delle tangenti. Consideriamo l'intervallo $[1,2]$: agli estremi $f(x) = x^3 - 2$ assume valori discordi in quanto $f(1) = -1 < 0, f(2) = 6 > 0$, in esso è strettamente crescente in quanto $f'(x) = 3x^2 > 0 \; \forall x \in [1,2]$ e volge concavità verso l'alto in quanto $f''(x) = 6x > 0 \; \forall x \in [1,2]$; quindi per il teorema di esistenza ed unicità degli zeri, esiste un unico zero della funzione $f(x) = x^3 - 2$ in $(1,2)$. Il valore approssimato lo si ricava ricorsivamente mediante la formula $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} = \dfrac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2}$ con punto iniziale $x_0 = 2$ in quanto $f(x_0)$ ed $f''(x_0)$ sono concordi. La tabella mostra i passi:

n	x_n	$x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2}$	$e = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	2,000	1,500	
1	1,500	1,296	0,500
2	1,296	1,261	0,204
3	1,261	**1,260**	0,035
4	**1,260**		**0,001**

Il valore approssimato con due cifre decimali è quindi $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$

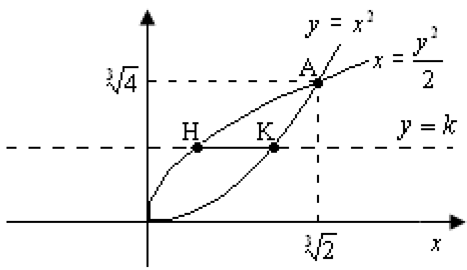
- Metodo di bisezione o dicotomico

Di seguito la tabella che mostra tutti i passi dell'algoritmo di bisezione:

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$m = \frac{a+b}{2}$	$f(m)$	$f(a)\cdot f(m) < 0$	Errore
0	1,000	2,000	-1,000	6,000	1,500	1,375	SI	0,500
1	1,000	1,500	-1,000	1,375	1,250	-0,047	NO	0,250
2	1,250	1,500	-0,047	1,375	1,375	0,600	SI	0,125
3	1,250	1,375	-0,047	0,600	1,313	0,261	SI	0,063
4	1,250	1,313	-0,047	0,261	1,281	0,103	SI	0,031
5	1,250	1,281	-0,047	0,103	1,266	0,027	SI	0,016
6	1,250	1,266	-0,047	0,027	**1,258**	-0,010	NO	**0,008**
7	**1,258**							

Ritroviamo anche in questo caso il valore approssimato $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$ ma con un numero raddoppiato di passi. Infatti il metodo di bisezione ha una velocità di convergenza più bassa rispetto al metodo delle tangenti.

Punto 3



Una retta parallela all'asse delle x ha equazione generica $y = k$; le limitazioni geometriche impongono $0 \le k \le \sqrt[3]{4}$.
Tale retta interseca la parabola di equazione $x = \frac{y^2}{2}$ in $\mathrm{H}\left(\frac{k^2}{2}, k\right)$ e la parabola di equazione $y = x^2$ in $\mathrm{K}\left(\sqrt{k}, k\right)$. In questo modo la corda intercettata avrà lunghezza $\overline{\mathrm{HK}} = g(k) = \left|\frac{k^2}{2} - \sqrt{k}\right|$ con

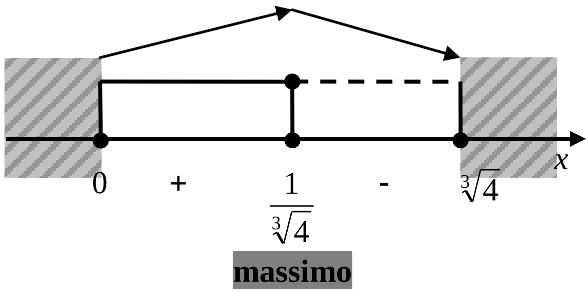
$0 \le k \le \sqrt[3]{4}$; in particolare nell'intervallo $\left[0, \sqrt[3]{4}\right]$ si ha $g(k) = -\frac{k^2}{2} + \sqrt{k}$.

Troviamo il massimo mediante lo studio della derivata:

$$g'(k) = -k + \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1 - 2 \cdot k^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{k}}$$

$$g'(k) > 0 \Rightarrow 0 < k < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$g'(k) < 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < k < \sqrt[3]{4}$$



Dal quadro dei segni della derivata prima deduciamo che la lunghezza della corda è massima per $k = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; in corrispondenza gli estremi sono $\mathrm{H}\left(\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$, $\mathrm{K}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ e la lunghezza massima è $\overline{\mathrm{HK}} = g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{4\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{8}$.

Punto 4

Se tagliamo il solido W ottenuto dalla rotazione intorno all'asse x con un piano $x=h$ ortogonale al'asse delle x, si possono avere le seguenti sezioni:

1. un punto se $h=0$;
2. una corona circolare se $0<h<\sqrt[3]{2}$;
3. una circonferenza di raggio $\mathrm{R}=\sqrt[3]{2}$ se $h=\sqrt[3]{2}$

Il volume del solido può essere ricavato in due modi alternativi:

1. L'area della corona circolare è $S(x)=\pi\cdot\left[\left(\sqrt{2x}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]=\pi\cdot\left(2x-x^4\right)$ con $0<x<\sqrt[3]{2}$; il volume lo si ottiene integrando l'area in $\left[0,\sqrt[3]{2}\right]$:

$$\mathrm{V}(\mathrm{W})=\int_0^{\sqrt[3]{2}}\left[\pi\cdot\left(2x-x^4\right)\right]dx=\pi\left[x^2-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[3]{2}}=\pi\left[\sqrt[3]{4}-\frac{2\sqrt[3]{4}}{5}\right]=\frac{3\sqrt[3]{4}}{5}\pi;$$

2. Il volume del solido è dato dalla differenza tra il volume generato dalla rotazione della parabola di equazione $y_1=\sqrt{2x}$ e il volume generato dalla rotazione della parabola di equazione $y_2=x^2$:

$$\mathrm{V}(\mathrm{W})=\pi\int_0^{\sqrt[3]{2}}y_1^2dx-\pi\int_0^{\sqrt[3]{2}}y_2^2dx=\pi\int_0^{\sqrt[3]{2}}\left(2x-x^4\right)dx=\pi\left[x^2-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[3]{2}}=$$

$$=\pi\left[\sqrt[3]{4}-\frac{2\sqrt[3]{4}}{5}\right]=\frac{3\sqrt[3]{4}}{5}\pi$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Sia $p(x)$ un polinomio di grado *n*. Si dimostri che la sua derivata *n*-esima è $p^{(n)}(x) = n! \cdot a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n .

Un generico polinomio $p(x)$ di grado *n* può essere scritto come:

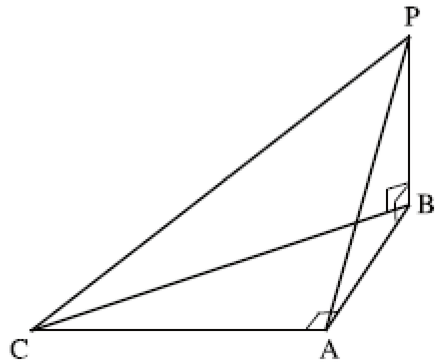
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ con } a_i \in R, i = 0,1,\cdots,n$$

Calcoliamo le derivate prima, seconda e così via sino all'n-esima:

$$p'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 \cdot a_2 x + a_1$$
$$p''(x) = n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-2} + (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_{n-1} x^{n-3} + \cdots + 2 \cdot a_2$$
$$p'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_n x^{n-3} + (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a_{n-1} x^{n-4} + \cdots + 6 \cdot a_3$$
$$\vdots$$
$$p^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n = n! \cdot a_n$$

Quesito 2

Siano ABC un triangolo rettangolo in A, *r* la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e *P* un punto di *r* distinto da *B*. Si dimostri che i tre triangoli *PAB, PBC, PCA* sono triangoli rettangoli.



Consideriamo la figura a lato rappresentante la geometria del problema.
Poiché la retta PB è ortogonale al piano del triangolo, essa è ortogonale a tutte le rette del piano passanti per B, quindi è ortogonale a BA e BC, da cui deduciamo che i triangoli PBC e PBA sono entrambi rettangoli in B. Ci resta

da dimostrare che anche PAC è rettangolo; in particolare vogliamo dimostrare che PAC è rettangolo in A. Ciò è vero se, applicando il teorema di Pitagora, si ha $\overline{PC}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AC}^2$.
Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli PBA , PBC ed ABC otteniamo:

$$\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{AB}^2 \quad (1)$$

$$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 \quad (2)$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \quad (3)$$

Sostituendo le espressioni (1) e (3) in (2) si ha:
$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 = \left(\overline{PA}^2 - \overline{AB}^2\right) + \left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2\right) = \overline{PA}^2 + \overline{AC}^2$ cioè il triangolo PAC è rettangolo in A.

Quesito 3

Sia *r* la retta d'equazione *y* = *ax* tangente al grafico di $y = e^x$. Quale è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta *r* forma con il semiasse positivo delle ascisse?

Un generico punto P del grafico G di $f(x) = e^x$ ha coordinate $P(a, e^a)$ e la tangente in $P(a, e^a)$ a G ha equazione $y = e^a \cdot (x - a) + e^a$. Imponendo il passaggio per l'origine $O(0,0)$ della retta tangente, si ha: $0 = e^a \cdot (0 - a) + e^a \rightarrow e^a (1 - a) = 0 \rightarrow a = 1$. Quindi la retta tangente passante per l'origine ha equazione $y = e \cdot x$ e forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo pari all'arcotangente del coefficiente angolare $\alpha = \arctan(e) \cong 69°48'$.

Quesito 4

Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione $f(x)=\sqrt[3]{x}+x^3-1$. Come si può essere certi che esiste un unico zero?

La funzione $f(x)=\sqrt[3]{x}+x^3-1$ è continua e definita in tutto R; la sua derivata prima è $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+3x^2$ che è sempre positiva in tutto $R-\{0\}$, per cui in $R-\{0\}$ la funzione è strettamente crescente; inoltre, poichè $f(0)=-1<0,\ f(1)=1>0$, per il primo teorema di unicità degli zeri possiamo dedurre che esiste un unico zero dell'equazione $f(x)=0$ in $(0,1)$.

Ricaviamo tale zero attraverso il metodo delle tangenti e quello di di bisezione.

- Metodo delle tangenti o di Newton-Raphson

Il valore approssimato lo si ricava ricorsivamente mediante la formula $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ con punto iniziale $x_0=1$ in quanto $f(x_0)$ ed $f''(x_0)$ sono concordi. La tabella seguente mostra tutti i passi dell'algoritmo:

n	x_n	$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$e=\lvert x_n-x_{n-1}\rvert$
0	1,000	0,700	
1	0,700	0,578	0,300
2	0,578	0,560	0,122
3	0,560	**0,560**	0,018
4	**0,560**		**0,000**

Il valore approssimato con due cifre decimali è quindi $\bar{x}\approx 0{,}56$

- Metodo di bisezione o dicotomico

Di seguito la tabella che mostra tutti i passi dell'algoritmo:

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$m=\frac{a+b}{2}$	$f(m)$	$f(a)\cdot f(m)<0$	Errore
0	0,000	1,000	-1,000	1,000	0,500	-0,081	NO	0,500
1	0,500	1,000	-0,081	1,000	0,750	0,330	SI	0,250
2	0,500	0,750	-0,081	0,330	0,625	0,099	SI	0,125
3	0,500	0,625	-0,081	0,099	0,563	0,003	SI	0,063
4	0,500	0,563	-0,081	0,003	0,531	-0,040	NO	0,031
5	0,531	0,563	-0,040	0,003	0,547	-0,019	NO	0,016
6	0,547	0,563	-0,019	0,003	**0,555**	-0,008	NO	**0,008**
7	**0,555**							

Con due cifre decimali ritroviamo $\bar{x} \approx 0{,}56$ ma con un numero raddoppiato di passi.

Quesito 5

Sia G il grafico di una funzione $x \to f(x)$ con $x \in R$. Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$.

Le equazioni della simmetria rispetto a una generica retta di equazione $x = k$ sono $\begin{cases} X = 2k - x \\ Y = y \end{cases}$, quindi il grafico G è simmetrico alla retta $x = k$ se passa per i punti di coordinate $P(x, f(x))$ e $P'(2k - x, f(x))$. In conclusione G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$ se $f(x) = f(2k - x)\ \forall x \in R$.

Quesito 6

Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto P di coordinate $(3\cos t, 2\sin t)$ al variare di t, $0 \le t \le 2\pi$.

Le equazioni parametriche del luogo geometrico sono:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad \text{con } 0 \le t \le 2\pi$$

Da esse ricaviamo $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \cos t \\ \dfrac{y}{2} = \sin t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} = \cos^2 t \\ \dfrac{y^2}{4} = \sin^2 t \end{cases}$

Ricordando l'identità trigonometrica fondamentale $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, il luogo cercato avrà equazione $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ cioè un ellisse di semiassi pari a 3 e 2.

Quesito 7

Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.

Anna ha due figli F_1 ed F_2 e sappiamo per certo che almeno uno dei due è femmina. Si possono presentare quindi 3 casi possibili:

1. F_1 maschio ed F_2 femmina
2. F_1 femmina ed F_2 maschio
3. F_1 femmina ed F_2 femmina

Ricordando la definizione di probabilità come rapporto tra casi favorevoli sui totali, la probabilità di avere due figlie femmine è pari a $p=\frac{1}{3}$.

Il quesito può essere risolto alternativamente nel seguente modo. Indichiamo con X la variabile aleatoria indicante il numero di figlie femmine della signora Anna e indichiamo con p la probabilità che un figlio sia di sesso femminile. Il quesito ci chiede di calcolare la probabilità che Anna abbia due figlie femmine sapendo che la prima è femmina, cioè $P(X=2\mid X\geq 1)$.

In particolare le probabilità che il numero di figlie femmine sia pari a 0, 1 o 2 sono:

$$P(X=0)=(1-p)^2,$$

$$P(X=2)=p^2,$$

$$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=1-(1-p)^2-p^2=2p(1-p)$$

La probabilità richiesta è quindi

$$P(X=2\mid X\geq 1)=\frac{P(X=2\cap X\geq 1)}{P(X\geq 1)}=\frac{P(X=2)}{P(X\geq 1)}=\frac{P(X=2)}{P(X=1)+P(X=2)}=$$

$$=\frac{p^2}{2p(1-p)+p^2}=\frac{p}{2-p}$$

e se assumiamo uguale probabilità per i due sessi si ha

$$P(X=2\mid X\geq 1)=\frac{p}{2-p}=\frac{\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Quesito 8

Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1},\binom{n}{n-2},\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di *n*?

Una progressione aritmetica è una successione di numeri tali che la differenza tra ciascun termine e il suo precedente sia una costante. Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

Nel caso in esame i tra numeri $\binom{n}{n-1},\binom{n}{n-2},\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica se $\binom{n}{n-1}-\binom{n}{n-2}=\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-3}$ ovvero se $\binom{n}{n-3}-2\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}=0$.

Esplicitiamo i singoli coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}=\frac{n!}{(n-1)!}=n$$

$$\binom{n}{n-2}=\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{n-3}=\frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}=\frac{n!}{(n-3)!\cdot 6}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$$

Si ha quindi:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}-2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+n=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}-n\cdot(n-1)+n=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}-n\cdot(n-2)=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{n\cdot(n-2)}{6}(n-1-6)=\frac{n\cdot(n-2)\cdot(n-7)}{6}=0\rightarrow\left\langle\begin{array}{l}n=0<3\ \text{non acc.}\\ n=2<3\ \text{non acc.}\\ n=7>3\ \text{acc.}\end{array}\right.$$

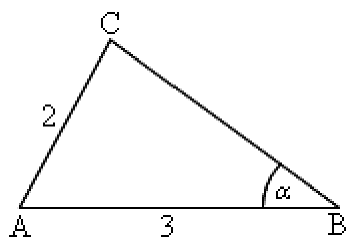
In conclusione il valore accettabile è $n=7$ cui corrispondono i tre valori

$$\binom{7}{6}=7,\binom{7}{5}=21,\binom{7}{4}=35\,.$$

Quesito 9

Si provi che non esiste un triangolo *ABC* con *AB* = 3, *AC* = 2 e $\mathrm{A\hat{B}C}=45°$. Si provi altresì che se *AB* = 3, *AC* = 2 e $\mathrm{A\hat{B}C}=30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

Consideriamo la figura a lato, rappresentante il triangolo ABC con $\overline{\mathrm{AC}}=2,\overline{\mathrm{AB}}=3,\mathrm{A\hat{B}C}=\alpha$ e consideriamo i casi corrispondenti ad $\alpha=45°$ ed $\alpha=30°$.



- $\alpha = 45°$

Applicando il teorema dei seni si ha

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\left(A\hat{C}B\right)} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha)} \to \sin\left(A\hat{C}B\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \sin(\alpha) \to$$

$$\sin\left(A\hat{C}B\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Poiché $\frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$, un triangolo con $\overline{AC} = 2, \overline{AB} = 3, A\hat{B}C = 45°$ non esiste.

- $\alpha = 30°$

Applicando ancora una volta il teorema dei seni si ricava:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\left(A\hat{C}B\right)} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha)} \to \sin\left(A\hat{C}B\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \sin(\alpha) \to \sin\left(A\hat{C}B\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \to$$

$$\to A\hat{C}B = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \cong 48{,}6° \vee A\hat{C}B = 180° - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \cong 131{,}4°$$

Il terzo angolo sarà di conseguenza $C\hat{A}B = 180° - 30° - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \cong 101{,}4° \vee C\hat{A}B \cong 18{,}6°$.

In tal caso esistono, quindi, due triangoli che soddisfano le condizioni $\overline{AC} = 2, \overline{AB} = 3, A\hat{B}C = 30°$.

Per calcolare la misura del terzo lato si può procedere in due modi distinti:

1. Teorema dei seni: si ha

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{BC}}{\sin C\hat{A}B}\rightarrow\overline{BC}=\overline{AC}\frac{\sin\left(C\hat{A}B\right)}{\sin(\alpha)}=\overline{AC}\frac{\sin\left(150°\text{-}A\hat{C}B\right)}{\frac{1}{2}}=$$

$$=2\overline{AC}\cdot\sin\left(150°\text{-}A\hat{C}B\right)=4\left[\sin 150°\cos\left(A\hat{C}B\right)-\cos 150°\sin\left(A\hat{C}B\right)\right]=$$

$$=4\left[\frac{\cos\left(A\hat{C}B\right)}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin A\hat{C}B}{2}\right]=4\left[\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\left(A\hat{C}B\right)}}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin A\hat{C}B}{2}\right]=$$

$$=4\cdot\left(\frac{\pm\sqrt{1-\frac{9}{16}}}{2}+\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}}{2}\right)=4\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{\left(3\sqrt{3}\pm\sqrt{7}\right)}{2}$$

- Teorema di Carnot: posto $\overline{BC}=x$ si ha

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+x^2-2\cdot\overline{AB}\cdot x\cdot\cos(\alpha)\rightarrow 4=9+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow$$

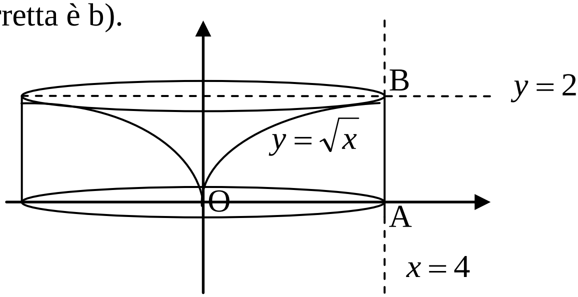
$$\rightarrow x^2-3\sqrt{3}\cdot x+5=0\rightarrow x=\overline{BC}=\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2}$$

Quesito 10

Si consideri la regione R delimitata da $y=\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x=4$. L'integrale $\int_0^4 2\pi x\cdot\left(\sqrt{x}\right)dx$ fornisce il volume del solido:

a) generato da R nella rotazione intorno all'asse *x;*
b) generato da R nella rotazione intorno all'asse y;
c)di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio $\sqrt{x}$;
d) nessuno di questi.
Si motivi esaurientemente la risposta.

La risposta corretta è b).



Infatti il volume richiesto può essere calcolato nel seguente modo: consideriamo i punti
$\mathrm{A}(x,0),\mathrm{B}\left(x,\sqrt{x}\right)$ con $0\le x\le 4$ ed il rettangolo infinitesimo di base dx ed altezza $\mathrm{h}=\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{x}$;
al variare di x questi rettangoli coprono tutta la regione R; per calcolare quindi il volume generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse y, basta sommare tutte le corone cilindriche, di area di base $\mathrm{A_b}=2\pi x\cdot dx$ ed altezza $\mathrm{h}=\sqrt{x}$, ottenute ruotando i rettangoli infinitesimi ed il cui volume è $\mathrm{V_x}=\mathrm{A_b}\cdot\mathrm{h}=2\pi x\sqrt{x}\cdot dx$; in altre parole il volume del cilindro è pari all'integrale dei volumetti $\mathrm{V_x}=2\pi x\cdot\sqrt{x}\cdot dx$ in $[0,4]$:

$$\mathrm{V}=\int_0^4 \mathrm{V_x}=\int_0^4 2\pi x\cdot\sqrt{x}dx=2\pi\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}dx=2\pi\cdot\frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4=$$

$$=\frac{4}{5}\pi\cdot 4^{\frac{5}{2}}=\frac{4}{5}\pi\cdot 2^5=\frac{128}{5}\pi$$

E' possibile seguire altre svariate strade per risolvere il quesito.

Una prima alternativa consente di calcolare il volume nel seguente modo: il volume richiesto è dato dalla differenza del volume del cilindro di altezza $\overline{\mathrm{AB}}=2$ e raggio di base $\overline{\mathrm{OA}}=4$ ed il volume ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da $y=\sqrt{x}$, dall'asse *y* e dalla retta $y=2$.

Il volume del cilindro è $\mathrm{V_C}=\pi\cdot\overline{\mathrm{OA}}^2\cdot\overline{\mathrm{AB}}=32\pi$.

Il volume ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da $y=\sqrt{x}$, dall'asse y e dalla retta $y=2$, è $\mathrm{V_D}=\pi\cdot\int_0^2 g^2(y)dy$ dove $g(y)=y^2, 0\le y\le 2$; quindi

$$\mathrm{V_D}=\pi\cdot\int_0^2 g^2(y)dy=\pi\cdot\int_0^2 y^4dy=\pi\cdot\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2=\frac{32}{5}\pi.$$

In conclusione $\mathrm{V}=\mathrm{V_C}-\mathrm{V_D}=32\pi-\frac{32}{5}\pi=\frac{128}{5}\pi$.

Una seconda alternativa consiste, invece, nel pensare la regione decomposta in tanti rettangoli ognuno dei quali genera un solido pari alla differenza di due cilindretti, in modo che, intuitivamente potremo pensare il solido come somma progressiva di infiniti gusci cilindrici coassiali di spessore dx, dove il raggio *x* varia da 0 a 4 .

Il volume del guscio (infinitesimo) può essere calcolato come prodotto dell'area circolare di base di raggio esterno $(x_i+\Delta x_i)$ e raggio interno x_i , per l'altezza: $V_i=\pi\cdot\left[(x_i+\Delta x_i)^2-x_i^2\right]\cdot\sqrt{x_i}$. Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a $\Delta x_i^{\ 2}$ il volume infinitesimo sarà

$V_i = 2\pi \cdot x_i \cdot \sqrt{x_i} \cdot \Delta x_i = 2\pi \cdot x_i^{\frac{3}{2}} \cdot \Delta x_i$. Se il numero di gusci cilindrici in cui suddividiamo l'intervallo $[0,4]$ è N il volume richiesto sarà:

$$V = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} V_i = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} 2\pi \cdot x_i^{\frac{3}{2}} \cdot \Delta x_i \right) = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4\pi}{5} \left[x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{128}{5}\pi .$$

In altro modo ancora avremmo potuto identificare la risposta corretta scartando le rimanenti. In questo senso, la a) è da scartare in quanto il volume generato da R nella rotazione intorno all'asse x è $\mathrm{V} = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$ che è differente da $\int_0^4 2\pi x \cdot \left(\sqrt{x}\right) dx$, e cio è confermato anche dal calcolo diretto in quanto $\mathrm{V} = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi \neq \frac{128}{5}\pi$.

Analogamente la c) è da scartare in quanto, detta $\mathrm{A}(x) = \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi x$ l'area del semicerchio di raggio $\sqrt{x}$ sezione di R con piani perpendicolari all'asse x, il volume del solido di base R è $\mathrm{V} = \int_0^4 \mathrm{A}(x) dx = \pi \int_0^4 \frac{x}{2} dx$ che è differente da $\int_0^4 2\pi x \cdot \left(\sqrt{x}\right) dx$, e cio è confermato anche dal calcolo diretto in quanto $\mathrm{V} = \pi \int_0^4 \frac{x}{2} dx = \pi \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^4 = 4\pi \neq \frac{128}{5}\pi$.