PROBLEMA1

Nel riferimento cartesiano Oxy si consideri il triangolo di vertici *O, B(1;0), A(0;a)* con $a > 0$. Preso un punto P interno al triangolo, si denotino con Q e con R i punti in cui la retta per P, parallela all'asse y, taglia i lati OB e AB rispettivamente.

1. Si dimostri che il luogo dei punti P, interno al triangolo OBA, tali che
$$\overline{QP} : \overline{QR} = \overline{OQ} : \overline{OB}$$
è un arco della parabola Γ d'equazione $y = ax(1-x)$
2. Si verifichi che il lato BA del triangolo e la mediana ad esso relativa sono tangenti a Γ rispettivamente in B e O
3. Si denoti con Ω la regione delimitata da Γ e da OB. In Ω, si inscriva un rettangolo con un lato su OB; si stabilisca per quale valore di *a* il rettangolo di perimetro massimo risulta essere un quadrato
4. Posto $a = \frac{1}{2}$, si indichi con r la retta ortogonale a Γ nel punto B. Si calcoli l'area racchiusa tra r e Γ e si calcoli altresì il volume del solido generato dalla rotazione di Ω intorno alla retta $y = -1$

RISOLUZIONE

Punto 1

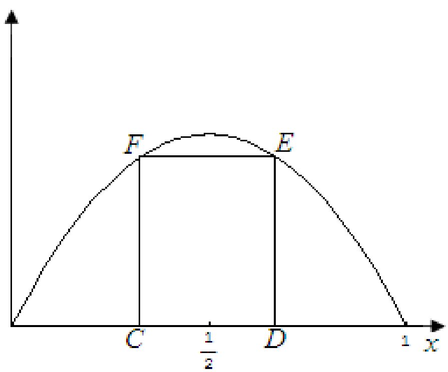
Sia $P(x, y), 0 < x < 1, 0 < y < a$ un generico punto P interno al triangolo AOB. Con queste convenzioni $\overline{QP} = y, \overline{OQ} = x, \overline{OB} = 1$ mentre $\overline{QR}$ lo ricaviamo dalla similitudine dei triangoli rettangoli AOB e RQP: $\overline{QR} : \overline{QB} = \overline{AO} : \overline{OB}$ da cui $\overline{QR} = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{QB}}{\overline{OB}} = a(1-x)$ per cui il luogo dei punti P per cui $\overline{QP} : \overline{QR} = \overline{OQ} : \overline{OB}$ diventa $y : a(1-x) = x : 1$ da cui $\Gamma : y = ax(1-x)$ che con la limitazione geometrica con

$0 < x < 1, 0 < y < a$ rappresenta un ramo di parabola con vertice in $V\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{4}\right)$ che interseca l'asse delle ascisse in $O(0,0), B(1,0)$.

Punto 2

L'equazione generica della tangente al grafico Γ in un punto (x_0, y_0) è $y = m(x - x_0) + y_0$ con $m = f'(x_0)$. La derivata prima della parabola in esame è $y' = a(1-2x)$ per cui la tangente in $O(0,0)$ ha equazione $y = ax$ in quanto $m = f'(0) = a$; la tangente in $B(1,0)$ ha equazione $y = -ax + a$ in quanto $m = f'(1) = -a$. Notiamo che, oltre al punto $B(1,0)$, anche il punto $A(0,a)$ appartiene alla retta di equazione $y = -ax + a$ per cui la retta tangente in $B(1,0)$ di equazione $y = -ax + a$ coincide con la retta su cui giace il lato BA del triangolo. Dobbiamo solo provare ora che la retta $O(0,0)$ di equazione $y = ax$ coincide con la mediana relativa al lato BA. Tale mediana passerà per l'origine $O(0,0)$ e per il punto medio $\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)$ del lato BA. La retta passante per questi due punti ha effettivamente equazione $y = ax$ coincidente con la tangente in $O(0,0)$ alla parabola.

Punto 3



Consideriamo la figura a lato.
I vertici rettangolo CDEF per ovvi motivi di simmetria rispetto alla direttrice della parabola di equazione $x = \frac{1}{2}$ hanno le seguenti coordinate:

$C(x,0), D(1-x,0), E(1-x, ax-ax^2), F(x, ax-ax^2)$ con $0<x<\frac{1}{2}$. Il perimetro del rettangolo è $2p(x)=2(\overline{CD}+\overline{DE})$ dove $\overline{CD}=1-2x, \overline{DE}=ax-ax^2$ per cui $2p(x)=2[-ax^2+x(a-2)+1]$; quindi il perimetro è una parabola con concavità verso il basso la cui ascissa di massimo coincide con l'ascissa del vertice, cioè $x_M=\frac{a-2}{2a}$ cui corrisponde il valore massimo

$$2p(x_M)=2\left[-a\left(\frac{a-2}{2a}\right)^2+\left(\frac{a-2}{2a}\right)(a-2)+1\right]=2\left[-\frac{(a-2)^2}{4a}+\frac{(a-2)^2}{2a}+1\right]$$

$$=2\left[1+\frac{(a-2)^2}{4a}\right]=\frac{a^2+4}{2a}.$$

La condizione $0<x<\frac{1}{2}$ con $x_M=\frac{a-2}{2a}$ espressa in funzione del parametro a diventa

$$0<\frac{a-2}{2a}<\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a-2}{2a}>0\\ \frac{a-2}{2a}<\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a-2}{2a}>0\\ \frac{a-2}{2a}-\frac{1}{2}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a-2}{2a}>0\\ \frac{1}{a}>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a<0\vee a>2\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow a>2$$

I lati del rettangolo di perimetro massimo misurano:

$\overline{CD}=\overline{FE}=\frac{2}{a}, \overline{DE}=\overline{CF}=\frac{a^2-4}{4a}$; notiamo che la misura del lato DE con la limitazione $a>2$ è positiva.

Affinché il rettangolo di perimetro massimo sia un quadrato dobbiamo imporre $\overline{CD}=\overline{DE}$ e cioè

$\frac{a^2-4}{4a}=\frac{2}{a} \Rightarrow a^2-4=8 \Rightarrow a^2-12=0 \Rightarrow a=\pm 2\sqrt{3}$; poiché $a>2$ la soluzione accettabile è $a=2\sqrt{3}$ cui corrisponde un perimetro massimo pari a $2p_{max}=\left[\frac{a^2+4}{2a}\right]_{a=2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

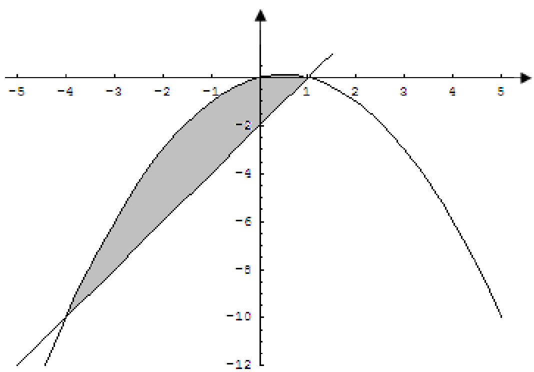
Punto 4

La retta r ortogonale a Γ nel punto $B(1,0)$ ha equazione $y=m'(x-1)$ dove $m'=-\frac{1}{m}$ ed m è il coefficiente angolare della retta tangente a Γ nel punto $B(1,0)$; la retta tangente a Γ nel punto $B(1,0)$, come trovato al Punto 2, ha equazione $y=-ax+a$, per cui $m=-a \Rightarrow m'=\frac{1}{a}$, e posto $a=\frac{1}{2}$, la retta r ortogonale a Γ nel punto $B(1,0)$ ha equazione $r: y=2(x-1)$.

L'area da calcolare è di seguito raffigurata in grigio.

Le intersezioni tra la parabola e la retta $r: y=2(x-1)$ si ricavano risolvendo l'equazione

$$\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}=2x-2 \Rightarrow x^2+3x-4=(x-1)(x+4)=0 \Rightarrow x=-4 \vee x=1.$$

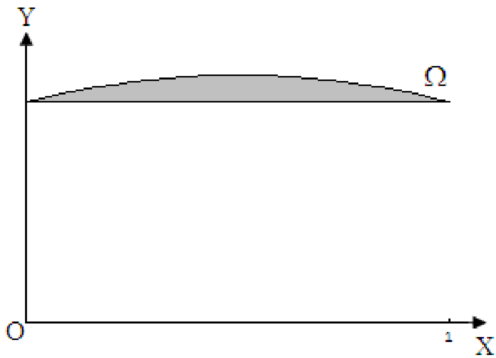


L'area richiesta, quindi, è pari a

$$S=\int_{-4}^{1}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)-2(x-1)\right]dx=\int_{-4}^{1}\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x+2\right)dx=\left[-\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{4}+2x\right]_{-4}^{1}$$

$$=\left(-\frac{1}{6}-\frac{3}{4}+2\right)-\left(\frac{32}{3}-12-8\right)=\frac{13}{12}+\frac{28}{3}=\frac{125}{12}$$

Per il calcolo del volume dovuto alla rotazione di Ω intorno alla retta $y=-1$ consideriamo la seguente trasformazione: $\begin{cases} X=x \\ Y=y+1 \end{cases}$. In questo modo la retta $y=-1$ verrà a coincidere nel sistema di riferimento OXY con l'asse delle ascisse mentre la parabola avrà equazione $Y=\frac{X}{2}-\frac{X^2}{2}+1$.



La regione Ω in OXY è raffigurata in grigio nella figura soprastante. Il volume richiesto sarà quindi pari a

$$V=\pi\int_{0}^{1}\left[\left(\frac{X}{2}-\frac{X^2}{2}+1\right)^2-1^2\right]dX=\pi\int_{0}^{1}\left(\frac{X^4}{4}-\frac{X^3}{2}-\frac{3X^2}{4}+X\right)dX=$$

$$=\pi\left[\frac{X^5}{20}-\frac{X^4}{8}-\frac{X^3}{4}+\frac{X^2}{2}\right]_{0}^{1}=\pi\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{7\pi}{40}$$

PROBLEMA2

In una semicirconferenza di diametro AB di lunghezza 2, è inscritto un quadrilatero convesso ABCD avente il lato CD uguale al raggio. I prolungamenti dei lati AD e BC si incontrano inun punto E.

1. Si dimostri che, qualunque sia la posizione dei punti C e D sulla semicirconferenza, si ha:

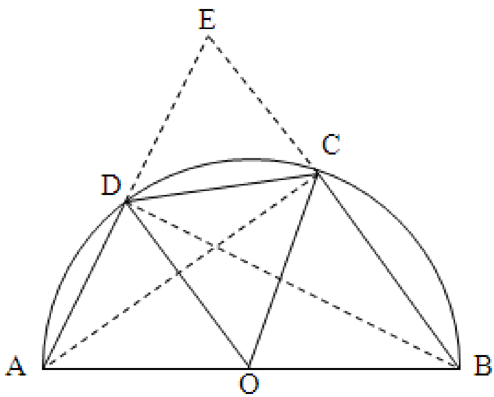
$$D\hat{A}C = D\hat{B}C = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad A\hat{E}B = \frac{\pi}{3}$$

2. Se $x = D\hat{A}B$, si provi che la somma CE+DE in funzione di x è data da $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$. Quale è l'intervallo di variabilità della x? Quale il valore massimo assunto da CE+DE?
3. Posto $g(x) = k\sin(x+\varphi)$ si trovino k e φ di modo che $g(x) = f(x)$
4. Si tracci, a prescindere dai limiti geometrici del problema, il grafico Γ di $f(x)$ e si denoti con R la regione delimitata, per $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$, dall'asse x e da Γ. Si calcoli l'area di R e si calcoli altresì il volume del solido generato da R nella rotazione attorno all'asse x.

RISOLUZIONE

Punto 1

Si consideri la figura a lato rappresentante la geometria del problema.



Per il teorema della corda applicato ai triangoli ADC e DCB si ha

$$D\hat{A}C = D\hat{B}C = \arcsin\left(\frac{\overline{DC}}{2r}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Poiché il triangolo AEC è rettangolo in C

$$A\hat{E}B = A\hat{E}C = \frac{\pi}{2} - D\hat{A}C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Punto 2

Poiché $D\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$, la limitazione sull'angolo $D\hat{A}B = x$ è $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Il triangolo ACE è rettangolo in C, per cui a norma del teorema dei triangoli rettangoli $\overline{CE} = \overline{CA} \cdot \tan\left(C\hat{A}E\right) = \overline{CA} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{CA}$ dove $\overline{CA}$, applicando il teorema dei triangoli rettangoli al triangolo ACB è $\overline{CA} = \overline{AB} \cdot \cos\left(C\hat{A}B\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ per cui $\overline{CE} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x$; analogamente il triangolo BED è rettangolo in D per cui a norma del teorema dei triangoli rettangoli

$\overline{DE} = \overline{DB} \cdot \tan\left(E\hat{B}D\right) = \overline{DB} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{DB}$ dove $\overline{DB}$, applicando il teorema dei triangoli rettangoli al triangolo ADB è

$\overline{DB} = \overline{AB} \cdot \sin\left(D\hat{A}B\right) = 2\sin x$ per cui $\overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sin x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x$. In conclusione

$f(x) = \overline{CE} + \overline{DE} = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos x = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ con $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$. La funzione $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ può essere anche scritta come $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ e il valore massimo è assunto quando $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ cioè quando $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$. Quindi il valore massimo è raggiunto per $x = \frac{\pi}{3}$ e vale $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$ e il quadrilatero corrispondente è un trapezio isoscele. In particolare $M = \left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ è massimo relativo ed assoluto per la funzione $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Punto 3

Nel Punto 2 abbiamo mostrato che la funzione $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ può essere anche scritta come $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, per cui i valori (φ, k) tali per cui $g(x) = k\sin(x+\varphi) = f(x)$ sono $\varphi = \frac{\pi}{6}, k = 2$. Se non avessimo intuito che la funzione $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ poteva essere scritta come $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, avremmo dovuto procedere in questo modo. Sfruttando la formula di addizione, la funzione $g(x)$ coincide con $g(x) = k\sin(x+\varphi) = k\sin(x)\cos(\varphi) + k\cos(x)\sin(\varphi)$. L'uguaglianza $k\sin(x)\cos(\varphi) + k\cos(x)\sin(\varphi) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ è verificata se $\begin{cases} k\sin(\varphi) = 1 \\ k\cos(\varphi) = \sqrt{3} \end{cases}$; dividendo la prima per la seconda otteniamo

$\tan(\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, mentre elevando al quadrato e sommando otteniamo la seconda condizione $k^2=4$ per cui $\begin{cases} k\sin(\varphi)=1 \\ k\cos(\varphi)=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ k^2=4 \end{cases}$.

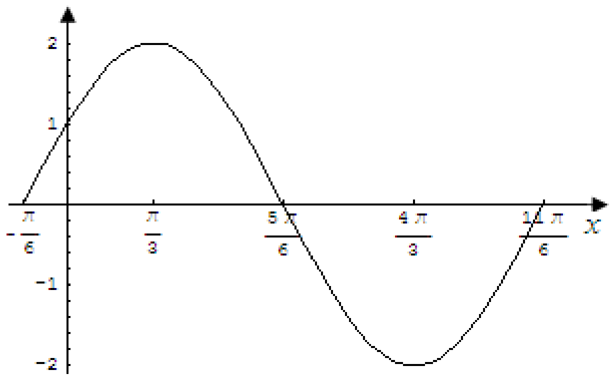
L'equazione $\tan(\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ha come soluzioni $\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi$ con $k\in Z$ mentre l'equazione $k^2=4$ ha come soluzioni $k=\pm 2$. Tra le possibili coppie (φ,k) quella che soddisfa il sistema $\begin{cases} k\sin(\varphi)=1 \\ k\cos(\varphi)=\sqrt{3} \end{cases}$ è solo $(\varphi,k)=\left(\frac{\pi}{6},2\right)$.

Punto 4

Il grafico Γ della funzione $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ lo ricaviamo attraverso i seguenti passi:

1. Grafichiamo la funzione elementare $h(x)=\sin x$;
2. Trasliamo il grafico del Punto 1 di $x=\frac{\pi}{6}$ verso le ascisse negative, ottenendo il grafico di $h_1(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$
3. Otteniamo il grafico Γ di $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ moltiplicando per 2 le ordinate del grafico di $h_1(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

Il grafico è il seguente.



Nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ la funzione $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ è positiva mentre in $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ è negativa ed è simmetrica rispetto alla retta $x = \frac{5\pi}{6}$; da ciò deduciamo che l'area della regione R è pari a

$$S(R) = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)dx - \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)dx$$

. Effettuando la sostituzione $t = x + \frac{\pi}{6}$ l'integrale diventa

$$S(R) = \int_0^{\pi} 2\sin t dt - \int_{\pi}^{2\pi} 2\sin t dt = \left[-2\cos t\right]_0^{\pi} + \left[2\cos t\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \left[-2\cos(\pi) + 2\cos(0)\right] + \left[2\cos(2\pi) - 2\cos(\pi)\right] = (2+2) + (2+2) = 8$$

Il volume del solido dovuto alla rotazione di R intorno all'asse delle ascisse è $V(R)=\pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} 4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$. Effettuando la sostituzione $t=x+\frac{\pi}{6}$ l'integrale diventa

$$V(R)=\pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} 4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx=\pi\int_0^{2\pi} 4\sin^2 t\,dt=\pi\int_0^{2\pi}(2-2\cos 2t)dt$$

$$=\pi\left[2t-\sin 2t\right]_0^{2\pi}=4\pi^2$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fra il grafico di $y = \sin x$ e l'asse x.

Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W?

A) $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$; B) $\pi \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$; C) $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$;

D) nessuno di questi

Si motivi la risposta.

La risposta esatta è la A).

Pensiamo la regione R decomposta in tanti ognuno dei quali genera un solido pari alla differenza di due cilindretti, in modo che, intuitivamente potremo pensare W come somma progressiva di infiniti gusci cilindrici coassiali di spessore dx, dove il raggio x varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Il volume del guscio (infinitesimo) può essere calcolato come prodotto dell'area circolare di base di raggio esterno $(x_i + \Delta x_i)$ e raggio interno x_i , per l'altezza: $V_i = \pi \cdot \left[(x_i + \Delta x_i)^2 - x_i^2\right] \cdot \sin x_i$. Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a $\Delta x_i^{\ 2}$ il volume infinitesimo sarà $V_i = 2\pi \cdot x_i \cdot \sin x_i \cdot \Delta x_i$. Se il numero di gusci cilindrici in cui suddividiamo l'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ è N il volume richiesto sarà:

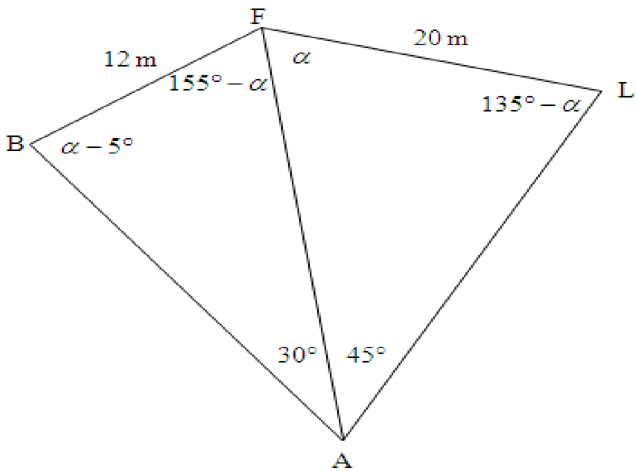
$$V=\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}V_i=\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}2\pi\cdot x_i\cdot\sin x_i\cdot\Delta x_i\right)=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$

$$=2\pi\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi\cdot 1=2\pi$$

Quesito 2

Angelo siede in un punto A della piazza del suo paese e vi osserva un albero in B, una fontana in F e un lampione in L. Stima l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede la congiungente B e F pari a 30° e l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede FL pari a 45°. Sapendo che $\mathrm{BF}=12\mathrm{m}$ e $\mathrm{FL}=20\mathrm{m}$ e che $B\hat{F}L=155°$, si spieghi ad Angelo come procedere per calcolare AB, AF e AL. Sono attendibili i risultati $\mathrm{AB}=\mathrm{AF}\cong 23{,}18\mathrm{m}$ e $\mathrm{AL}\cong 27{,}85\mathrm{m}$?

Consideriamo la figura seguente rappresentante la geometria del problema.



Indicando l'angolo $A\hat{F}L=\alpha$, gli altri angoli di conseguenza saranno $A\hat{L}F=135°-\alpha, A\hat{F}B=155°-\alpha, A\hat{B}F=\alpha-5°$ con $5°\le\alpha\le 135°$.

Applichiamo il teorema dei seni ai due triangoli ABF ed AFL per ricavare in ambo i casi la misura del lato $\overline{AF}$ e dei lati $\overline{AL}$ e $\overline{AB}$:

$$(1)\ \frac{\overline{AF}}{\sin\left(135°-\alpha\right)}=\frac{\overline{FL}}{\sin\left(45°\right)}\Rightarrow\overline{AF}=\frac{20\sin\left(135°-\alpha\right)}{\sin\left(45°\right)}=20\sqrt{2}\cdot\sin\left(135°-\alpha\right)$$

$$(2)\ \frac{\overline{AF}}{\sin\left(\alpha-5°\right)}=\frac{\overline{BF}}{\sin\left(30°\right)}\Rightarrow\overline{AF}=\frac{12\sin\left(\alpha-5°\right)}{\sin\left(30°\right)}=24\cdot\sin\left(\alpha-5°\right)$$

$$(3)\ \frac{\overline{AL}}{\sin\left(\alpha\right)}=\frac{\overline{FL}}{\sin\left(45°\right)}\Rightarrow\overline{AL}=\frac{\overline{FL}\sin\left(\alpha\right)}{\sin\left(45°\right)}=20\sqrt{2}\cdot\sin\left(\alpha\right)$$

$$(4)\ \frac{\overline{AB}}{\sin\left(155°-\alpha\right)}=\frac{\overline{BF}}{\sin\left(30°\right)}\Rightarrow\overline{AB}=\frac{\overline{BF}\sin\left(155°-\alpha\right)}{\sin\left(30°\right)}=24\cdot\sin\left(155°-\alpha\right)$$

Uguagliando le due espressioni (1) e (2) si ha:

$$20\sqrt{2}\cdot\sin\left(135°-\alpha\right)=24\cdot\sin\left(\alpha-5°\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{2}\left(\sin 135°\cos\alpha-\cos 135°\sin\alpha\right)=24\left(\sin\alpha\cos 5°-\cos\alpha\sin 5°\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)=24\left(\sin\alpha\cos 5°-\cos\alpha\sin 5°\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)=24\left(\sin\alpha\cos 5°-\cos\alpha\sin 5°\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(24\cos 5°-20\right)\sin\alpha-\left(20+24\sin 5°\right)\cos\alpha=0\Rightarrow\ \text{posto}\ \cos\alpha\neq 0$$

$$\Leftrightarrow\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Rightarrow\left(24\cos 5°-20\right)\cos\alpha\cdot\left[\tan\alpha-\left(\frac{20+24\sin 5°}{24\cos 5°-20}\right)\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\left(\frac{20+24\sin 5°}{24\cos 5°-20}\right)\cong 5{,}652$$

Ricordiamo ora le formule trigonometriche che esprimono il seno e il coseno in funzione della tangente:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \ .$$

Dalla (1) ricaviamo

$$\overline{AF} = 20\sqrt{2}\cdot\sin(135° - \alpha) \ = 20(\sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{20(1+\tan\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

$$= \frac{20(1+5,652)}{\sqrt{1+(5,652)^2}} \cong 23,18m$$

Dalla (3) ricaviamo

$$\overline{AL} = 20\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha) = \frac{20\sqrt{2}\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{20\sqrt{2}\cdot 5,652}{\sqrt{1+(5,652)^2}} \cong 27,85m$$

Dalla (4) ricaviamo

$$\overline{AB} = 24\cdot\sin(155° - \alpha) = 24\cdot(\sin 155° \cos\alpha - \cos 155° \sin\alpha) =$$

$$= \frac{24\sin 155° - 24\cos 155° \tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{24\sin 155° - 24\cos 155° \cdot 5,652}{\sqrt{1+(5,652)^2}} \cong 23,18m$$

In conclusione sono attendibili i risultati proposti dalla traccia.

Quesito 3

La base di un solido S è la regione triangolare compresa tra gli assi coordinati e la retta di equazione $4x+5y=20$. Si calcoli il volume di S sapendo che le sue sezioni con piani perpendicolari all'asse *x* sono semicerchi.

Fissato *x*, il raggio del semicerchio sarà $r(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{20-4x}{5}\right) = \left(\frac{10-2x}{5}\right)$

con $0 \le x \le 5$ cui corrisponde un' area pari a

$A(x) = \frac{\pi}{2}r^2(x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{10-2x}{5}\right)^2 = \frac{2\pi}{25}(5-x)^2$. Integrando l'area otteniamo il volume richiesto:

$$V=\int_0^5 A(x)dx=\frac{2\pi}{25}\int_0^5 (5-x)^2\,dx=\frac{2\pi}{75}\left[-(5-x)^3\right]_0^5=\frac{2\pi}{75}\cdot 125=\frac{10\pi}{3}.$$

Quesito 4

Si spieghi perché l'equazione $\cos x = x$ ha almeno una soluzione

La funzione $f(x)=x-\cos x$ è definita e continua in tutto R ed è strettamente crescente nel dominio R in quanto ha derivata prima $f'(x)=1+\sin x$ non negativa. Poichè, inoltre, $f(0)=-1<0,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ a norma del teorema degli zeri esiste un'unica soluzione dell'equazione $f(x)=0$ e cioè di $\cos x = x$.

Quesito 5

Si risolva l'equazione $|x-1|=1-|x|$

Per risolvere l'equazione richiesta bisogna considerare che:

- per $x<0$ si ha: $|x-1|=1-x, |x|=-x$
- per $0\le x<1$ si ha: $|x-1|=1-x, |x|=x$
- per $x\ge 1$ si ha: $|x-1|=x-1, |x|=x$

Risolviamo l'equazione considerando gli intervalli soprastanti:

- $x<0$: $1-x=1+x \Rightarrow x=0$ non accettabile;
- $0\le x<1$: $1-x=1-x \Rightarrow 0=0$ per cui tutti i numeri reali appartenenti all'intervallo $[0,1)$ sono soluzioni dell'equazione;
- $x\ge 1$: $x-1=1-x \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$ accettabile

In conclusione l'equazione presenta infinite soluzioni e sono gli infiniti numeri reali appartenenti all'intervallo $[0,1]$.

Quesito 6

Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?

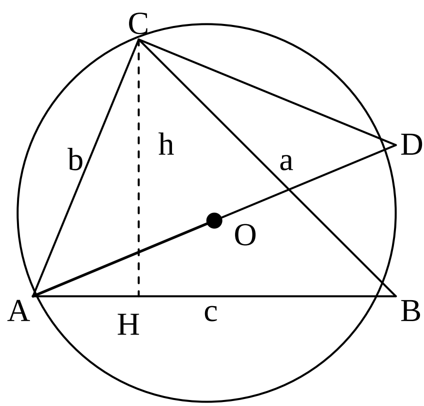
Sia r il raggio della sfera inscritta il cui volume è $V_{Sfera} = \frac{4\pi}{3} r^3$. Il cubo circoscritto ha lato pari al diametro della sfera $l = 2r$, di conseguenza il volume è $V_{Cubo} = l^3 = 8r^3$. Il rapporto tra i volumi è quindi

$$R = \frac{V_{Sfera}}{V_{Cubo}} = \frac{\frac{4\pi}{3} r^3}{8r^3} = \frac{\pi}{6}.$$

Quesito 7

Si dimostri che in un triangolo, il rapporto tra ciascun lato e il seno dell'angolo ad esso opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo.

Si consideri la figura a lato.



Siano $\alpha = C\hat{A}B, \beta = C\hat{B}A, \gamma = B\hat{C}A$ gli angoli opposti rispettivamente ai lati $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$ del triangolo ABC inscritto e sia $\overline{AO} = R$ il raggio della circonferenza circoscritta. Il triangolo ACD è inscritto in una semicirconferenza per cui è rettangolo in C; inoltre $A\hat{D}C = A\hat{B}C$ in quanto sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. I triangoli ACD e CHB sono, quindi, simili in quanto entrambi rettangoli con un angolo acuto uguale, per cui vale la proporzione tra lati omologhi:

$h:b=a:2R$ da cui $2R=\frac{ab}{h}$. Per il teorema sui triangoli rettangoli applicato a CHB si ha $h=a\sin\beta=b\sin\alpha$ per cui sostituendo in $2R=\frac{ab}{h}$ ricaviamo $2R=\frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}\sin\beta}=\frac{b}{\sin\beta}$ e $2R=\frac{a\cancel{b}}{\cancel{b}\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\alpha}$;

dobbiamo quindi solo dimostrare che $2R=\frac{c}{\sin\gamma}$; applicando il teorema dei seni al triangolo ABC si ha $\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha}$ per cui sostituendo nella formula del diametro si ha in definitiva

$2R=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.

Quesito 8

Sia $t\in[0,2\pi]$; quale è la curva rappresentata dalle equazioni $x=a\cos t$ e $y=b\sin t$?

Si tratta di trovare l'equazione cartesiana del luogo a partire dalle seguenti equazioni parametriche: $\begin{cases}\cos t=\frac{x}{a}\\ \sin t=\frac{x}{b}\end{cases}$ Elevando ambo i membri al quadrato e ricordando l'identità goniometrica fondamentale $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ il luogo avrà equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ che corrisponde all'equazione dell'ellisse di semiassi *a* e *b*.