PROBLEMA1

Sia *f* la funzione definita da $f(x)=3\ln\left(e^2-x\right)$.

1. Si studi la funzione *f* e se ne tracci il grafico Γ.
2. La funzione *f* è invertibile? Se sì, quale è la sua equazione? E quale il suo grafico? Si disegnino, successivamente, anche i grafici delle funzioni definite da $g(x)=3\ln\left|e^2-x\right|$ e da $h(x)=-f(x)$ illustrando le eventuali loro simmetrie.
3. Sia R la regione delimitata da Γ e dagli assi coordinati. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R è la base di un solido W che tagliato con piani ortogonali all'asse x dà tutte sezioni rettangolari di altezza 5. Si calcoli il volume W. Supposto, invece, che la regione R ruoti di un giro completo attorno alla retta y=-6, come si può calcolare il volume del solido che essa genera? Si indichi solo il procedimento senza risolvere eventuali integrali.

RISOLUZIONE

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x)=3\ln\left(e^2-x\right)$.

Dominio: $\left(e^2-x\right)>0 \Rightarrow x\in\left(-\infty,e^2\right)$;

Intersezione asse ascisse:

$f(x)=3\ln\left(e^2-x\right)=0 \Rightarrow \left(e^2-x\right)=1 \Rightarrow x=e^2-1$

accettabile in quanto interno al dominio $x\in\left(-\infty,e^2\right)$;

Intersezione asse ordinate: $x=0 \Rightarrow f(0)=3\ln\left(e^2\right)=6$;

Simmetrie: la funzione non è né pari né dispari;

Positività: $f(x)=3\ln\left(e^2-x\right)>0 \Rightarrow \left(e^2-x\right)>1 \Rightarrow x\in\left(-\infty,e^2-1\right)$;

Asintoti verticali: $\lim_{x\to\left(e^2\right)^-} f(x)=-\infty$ per cui $x=0$ è asintoto verticale sinistro;

Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ non esistono asintoti orizzontali;

Asintoti obliqui: $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ non esistono asintoti obliqui;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x) = \frac{-3}{(e^2 - x)}$ che è sempre negativa all'interno del dominio $x \in (-\infty, e^2)$; di conseguenza la funzione è strettamente decrescente in tutto il dominio;

Concavità e convessità: la derivata seconda è $f''(x) = \frac{-3}{(e^2 - x)^2}$ che è sempre negativa all'interno del dominio $x \in (-\infty, e^2)$; di conseguenza la funzione presenta concavità verso il basso in tutto il dominio.

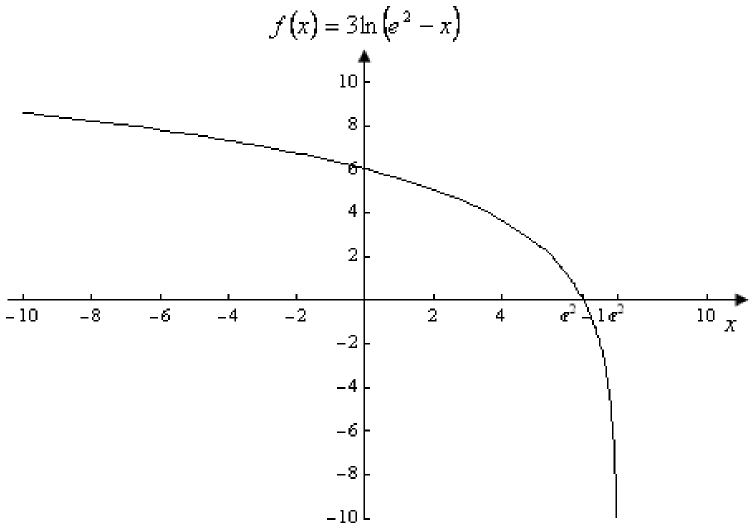
Avremmo potuto ricavare il grafico della funzione $f(x) = 3\ln(e^2 - x)$ in maniera alternativa a partire dal grafico della funzione $g(x) = \ln(x)$ attraverso i seguenti passi:

I. Grafico della funzione $g_1(x) = \ln(-x)$ simmetrico rispetto all'asse delle ordinate del grafico di $g(x) = \ln(x)$;

II. Traslazione lungo le ascisse positive di e^2 del grafico di $g_1(x) = \ln(-x)$ ottenendo il grafico di $g_2(x) = \ln(e^2 - x)$;

III. Cambiamento di scala di un fattore 3 lungo l'asse delle ordinate del grafico di $g_2(x) = \ln(e^2 - x)$ ottenendo così il grafico di $f(x) = 3\ln(e^2 - x)$.

Di seguito il grafico:



Punto 2

La funzione $f(x)=3\ln(e^2-x)$ è strettamente decrescente in tutto il dominio, di conseguenza è anche invertibile. Si ottiene la funzione inversa risolvendo l'equazione $y=3\ln(e^2-x)$ ed esprimendo la variabile *x* in funzione della variabile *y*:

$$y=3\ln(e^2-x)\Rightarrow \ln(e^2-x)=\frac{y}{3}\Rightarrow (e^2-x)=e^{\frac{y}{3}}\Rightarrow x=e^2-e^{\frac{y}{3}}$$

Studiamo la funzione $g(y)=e^2-e^{\frac{y}{3}}$.

Dominio: R;

Intersezione asse ascisse:

$$g(y)=e^2-e^{\frac{y}{3}}=0\Rightarrow e^2=e^{\frac{y}{3}}\Rightarrow \frac{y}{3}=2\Rightarrow y=6;$$

Intersezione asse ordinate: $y=0\Rightarrow g(0)=e^2-1$;

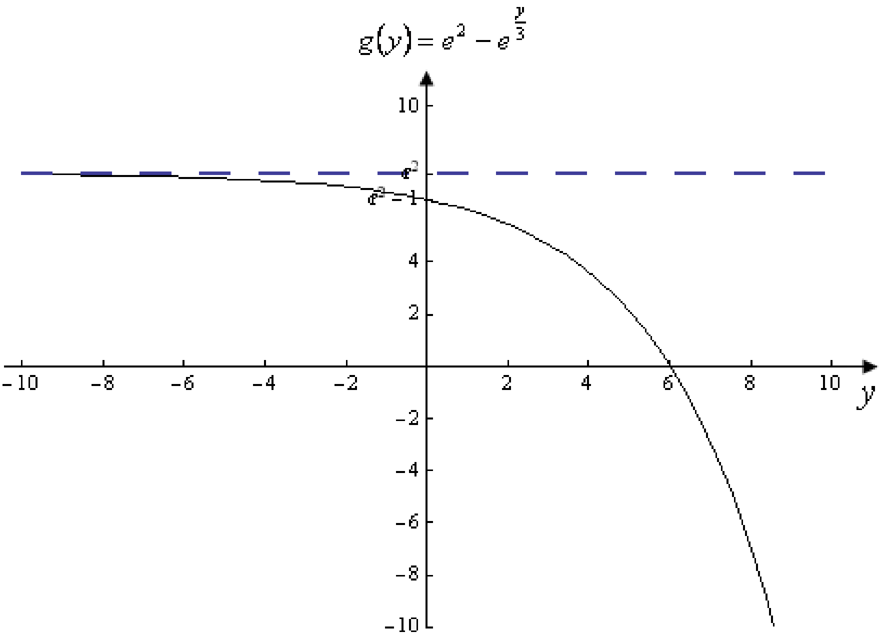
Simmetrie: la funzione non è né pari né dispari;

Positività: $g(y)=e^2-e^{\frac{y}{3}}>0\Rightarrow e^2>e^{\frac{y}{3}}\Rightarrow \frac{y}{3}<2\Rightarrow y\in(-\infty,6)$;

Asintoti verticali:non ve ne sono visto che il dominio è R;
Asintoti orizzontali: $\lim_{y\to-\infty} g(y)=e^2$, $\lim_{y\to+\infty} g(y)=-\infty$ per cui $y=e^2$ è asintoto orizzontale sinistro;
Asintoti obliqui: $\lim_{y\to-\infty}\frac{g(y)}{y}=0$, $\lim_{y\to+\infty}\frac{g(y)}{y}=-\infty$ non esistono asintoti obliqui;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $g'(y)=-\frac{e^{\frac{y}{3}}}{3}$ che è sempre negativa all'interno del dominio R; di conseguenza la funzione è strettamente decrescente in tutto il dominio;

Concavità e convessità: la derivata seconda è $g''(y)=-\frac{e^{\frac{y}{3}}}{9}$ che è sempre negativa all'interno del dominio R; di conseguenza la funzione presenta concavità verso il basso in tutto il dominio.
Di seguito il grafico.

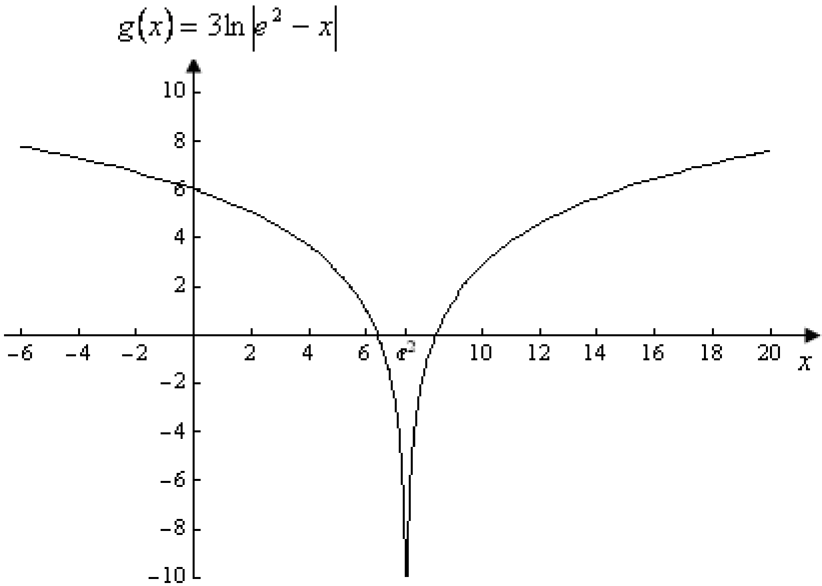


La funzione $g(x)=3\ln|e^2-x|$ può essere riscritta come $g(x)=3\ln|e^2-x|=\begin{cases}3\ln(e^2-x) & \text{se } x<e^2\\ 3\ln(x-e^2) & \text{se } x>e^2\end{cases}$;

per $x<e^2$ il grafico di $g(x)=3\ln|e^2-x|$ coincide con il grafico di $f(x)=3\ln(e^2-x)$ mentre per $x>e^2$,

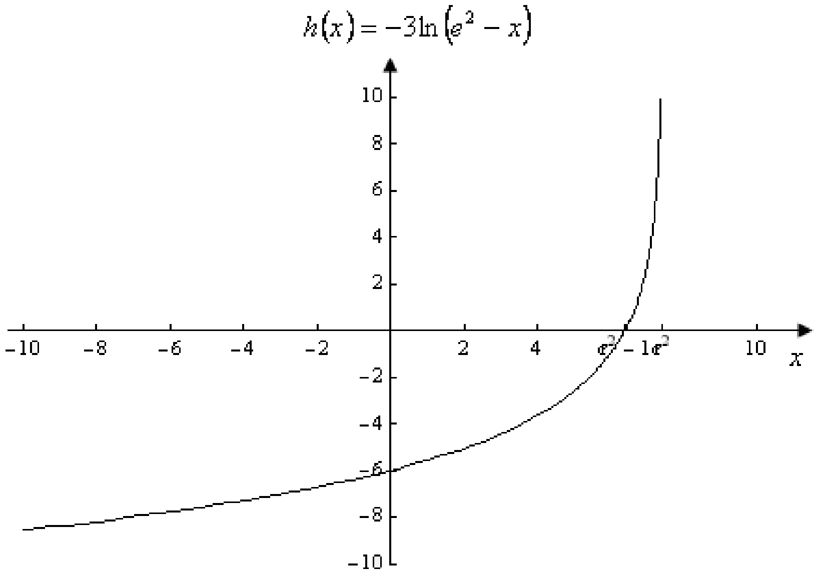
poiché $g(x)=3\ln|e^2-x|=3\ln(x-e^2)=3\ln[e^2-(2e^2-x)]=f(2e^2-x)$ il grafico è il simmetrico del grafico di $f(x)=3\ln(e^2-x)$ rispetto alla retta di equazione $x=e^2$.

Di seguito il grafico.



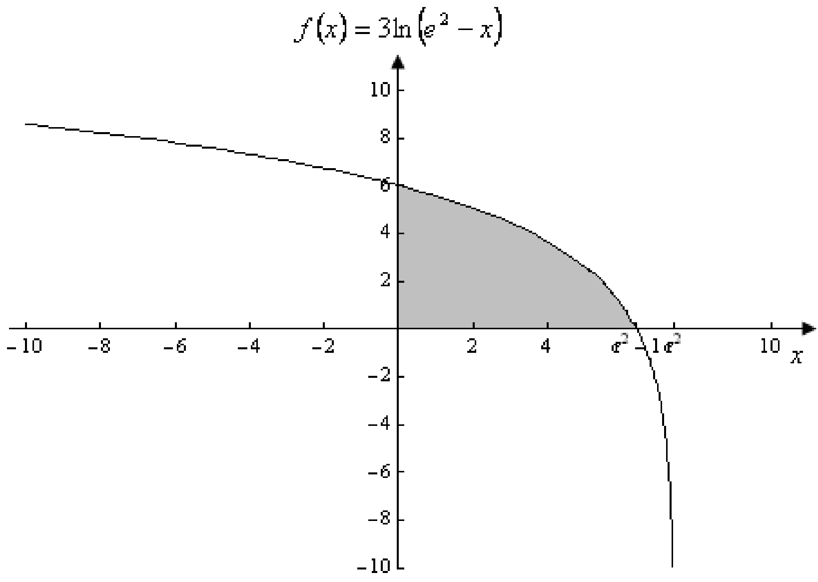
Il grafico della funzione $h(x)=-3\ln(e^2-x)$ è il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse del grafico di $f(x)=3\ln(e^2-x)$.

Di seguito il grafico.



Punto 3

L’area da calcolare è di seguito raffigurata in grigio.



L'area richiesta è $S(R)=\int_0^{e^2-1} 3\ln\left(e^2-x\right)dx$.

Effettuando la sostituzione $e^2-x=t$ l'integrale definito diventa $S(R)=\int_{e^2}^{1} 3\ln t(-dt)=\int_1^{e^2} 3\ln t dt$, integrando per parti si ha:

$$S(R)=\int_1^{e^2} 3\ln t dt=3\left[t(\ln t-1)\right]_1^{e^2}=3\left[e^2(2-1)-(0-1)\right]=3\left(e^2+1\right).$$

Punto 4

L'area del solido W si ottiene integrando nell'intervallo $\left[0,e^2-1\right]$ l'area del rettangolo pari a $5\cdot f(x)$ per cui

$$V(W)=\int_0^{e^2-1} 5\cdot 3\ln\left(e^2-x\right)dx=5\cdot S(R)=15\left(e^2+1\right).$$

Per calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando la regione R attorno alla retta di equazione $y=-6$, applichiamo il Principio di Cavalieri, cioè immaginiamo il solido di rotazione come insieme delle sue sezioni con piani perpendicolari all'asse *x*; tali sezioni sono corone circolari di raggio interno costante, pari a $R_{\text{int}}=6$, e raggio esterno pari a $R_{est}(x)=3\ln\left(e^2-x\right)+6$. Pertanto il volume richiesto è pari a $V(W_1)=\pi\int_0^{e^2-1}\left[R_{est}^2(x)-R_{\text{int}}^2\right]dx=\pi\int_0^{e^2-1}\left\{\left[3\ln\left(e^2-x\right)+6\right]^2-36\right\}dx$;

effettuando la sostituzione $e^2-x=t$ l'integrale definito diventa

$$V(W_1)=\pi\int_{e^2}^{1}\left[(3\ln t+6)^2-36\right](-dt)=\pi\int_1^{e^2}\left[(3\ln t+6)^2-36\right]dt$$

$$=\pi\int_1^{e^2}\left(9\ln^2 t+36\ln t\right)dt$$

Ricordando che:

$$\int \ln^2 t dt=\left[t\left(\ln^2 t-2\ln t+2\right)\right]+c,\int \ln t dt=\left[t(\ln t-1)\right]+c,$$

il volume diventa:

$$V(W_1)=\pi\int_1^{e^2}\left(9\ln^2 t+36\ln t\right)dt=\pi\left[9t\left(\ln^2 t+2\ln t-2\right)\right]_1^{e^2}=$$

$$=\pi\left[9e^2(4+4-2)-9(-2)\right]=18\pi\left(3e^2+1\right)$$

PROBLEMA2

In un riferimento cartesiano Oxy si consideri la semicirconferenza γ, tangente nell'origine all'asse y, passante per il punto A(2;0) e appartenente al primo quadrante.

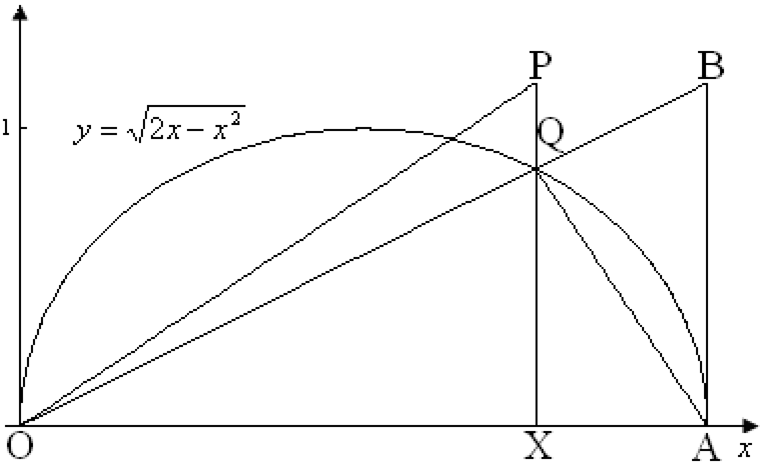
1. Sia X un punto del diametro OA, distinto da O, Q il punto di γ avente la stessa ascissa di X e B il punto in cui la semiretta OQ incontra la tangente in A alla semicirconferenza. Sia P un punto della semiretta XQ tale che i due triangoli OPX e OQA abbiano uguale area. Qual è la posizione limite di P quando X tende a O? E quando tende ad A? Sia P_1 la posizione di P quando $AOQ = \frac{\pi}{6}$; si determinino le coordinate di P_1.
2. Si provi che il luogo geometrico Γ descritto da P, al variare di X su OA, è il ramo, appartenente al primo quadrante, della curva di equazione $xy^2 + 4x - 8 = 0$.
3. Si disegni Γ.
4. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della regione piana limitata dalla retta OP_1, da Γ e dall'asse x.

RISOLUZIONE

Punto 1

L'equazione di una circonferenza con centro in $C = (1,0)$ e raggio unitario è $(x-1)^2 + y^2 = 1$; esprimendo l'equazione in forma esplicita si ha $y = \begin{cases} \sqrt{2x - x^2} & \text{se } y \geq 0 \\ -\sqrt{2x - x^2} & \text{se } y < 0 \end{cases}$; la semicirconferenza γ si trova nel primo quadrante, pertanto avrà equazione $y = \sqrt{2x - x^2}$.

Di seguito viene raffigurata la geometria del problema.



Il punto X ha coordinate $X=(x,0)$ con $0<x\le 2$, il punto $Q=\left(x,\sqrt{2x-x^2}\right)$ e il punto $P=(x,y)$; il triangolo rettangolo OQA ha ipotenusa $\overline{OA}=2$ ed altezza pari all'ordinata del punto Q, $h_{OQA}=\sqrt{2x-x^2}$; di conseguenza la sua area sarà $S(OQA)=\frac{\overline{OA}\cdot h_{OQA}}{2}=\sqrt{2x-x^2}$.

Il triangolo OPX ha i due cateti le cui misure sono pari rispettivamente all'ascissa e all'ordinata del punto P, cioè $\overline{OX}=x, \overline{PX}=y$ per cui $S(OPX)=\frac{\overline{OX}\cdot\overline{PX}}{2}=\frac{xy}{2}$; uguagliando le due aree si ricava $\frac{xy}{2}=\sqrt{2x-x^2}$ da cui $y=\frac{2\sqrt{2x-x^2}}{x}=2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$ per cui il punto P ha coordinate $P=\left(x,2\sqrt{\frac{2}{x}-1}\right)$.

Se il punto X tende ad O si ha che $x \to 0^+$ per cui l'ascissa di P tenderà a 0 mentre l'ordinata $2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$ tenderà a $+\infty$; di conseguenza se X tende ad O, il punto P tende all'infinito.
Se, invece, X tende ad A, si ha che $x \to 2^-$ per cui anche P tenderà ad A in quanto avrà ascissa pari a 2 ed ordinata nulla.

Se $A\hat{O}Q = \frac{\pi}{6}$ il cateto $\overline{OQ} = \sqrt{(x)^2 + \left(\sqrt{2x - x^2}\right)^2} = \sqrt{2x}$ sarà pari a $\overline{OQ} = \overline{OA} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, per cui uguagliando le espressioni si ricava $x = \frac{3}{2}$ e di conseguenza $P_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Punto 2

Poiché P ha coordinate $P = \left(x, 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}\right)$, il luogo che esso descrive al variare di X su OA è dato da $y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$ per cui elevando al quadrato ambo i membri si ha: $y^2 = 4\left(\frac{2}{x}-1\right) \Rightarrow xy^2 + 4x - 8 = 0$ con $0 < x \le 2$.

Punto 3

Studiamo la funzione $y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$ con $0 < x \le 2$.

Dominio: $x \in \left]0, 2\right]$;

Intersezione asse ascisse: $y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1} = 0 \Rightarrow x = 2$;

Intersezione asse ordinate: non ve ne sono in quanto $x = 0$ non appartiene al dominio;

Simmetrie: la funzione non è né pari né dispari;

Positività: $y=2\sqrt{\frac{2}{x}-1}>0 \Rightarrow x\in(0,2)$ cioè all'interno del dominio la funzione non è mai negativa;

Asintoti verticali: $\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}=+\infty, \lim_{x\to 2^-} 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}=0$ per cui $x=0$ è asintoto verticale destro;

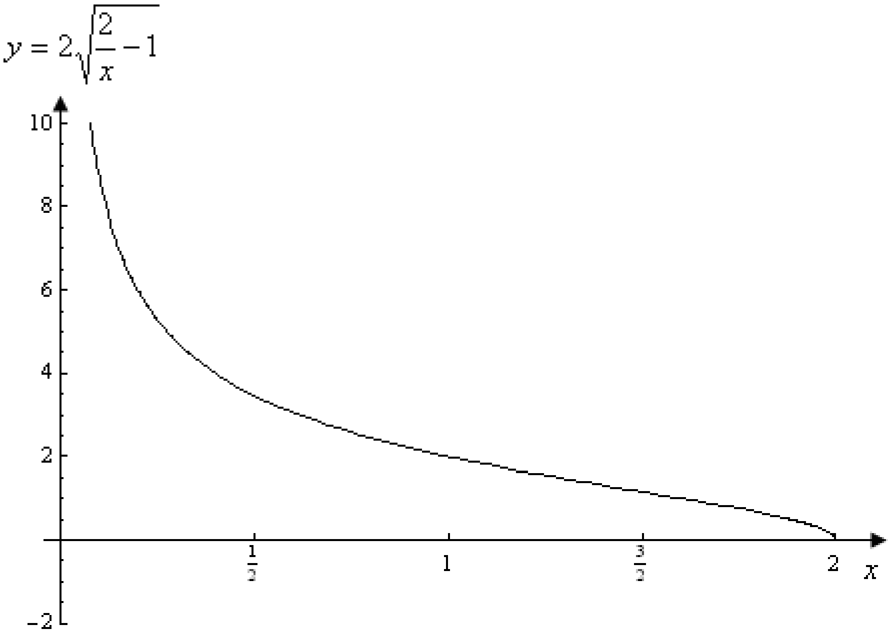
Asintoti orizzontali: visto il dominio limitato non esistono asintoti orizzontali;

Asintoti obliqui: visto il dominio limitato non esistono asintoti obliqui;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $y'=\frac{-2}{x^{3/2}\sqrt{2-x}}$ che è sempre negativa all'interno del dominio; di conseguenza la funzione è strettamente decrescente in tutto il dominio; inoltre poiché $\lim_{x\to 2^-}\frac{-2}{x^{3/2}\sqrt{2-x}}=-\infty$, $x=2$ è ascissa di flesso a tangente verticale;

Concavità e convessità: la derivata seconda è $y''=\frac{6-4x}{x^{5/2}\sqrt{(2-x)^3}}$ che è positiva in $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ in cui volgerà concavità verso l'alto e negativa in $\left(\frac{3}{2},2\right)$ in cui volgerà concavità verso il basso; di conseguenza $P_1=\left(\frac{3}{2},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ è un flesso a tangente obliqua con tangente inflessionale $y=-\frac{8\sqrt{3}}{9}x+2\sqrt{3}$.

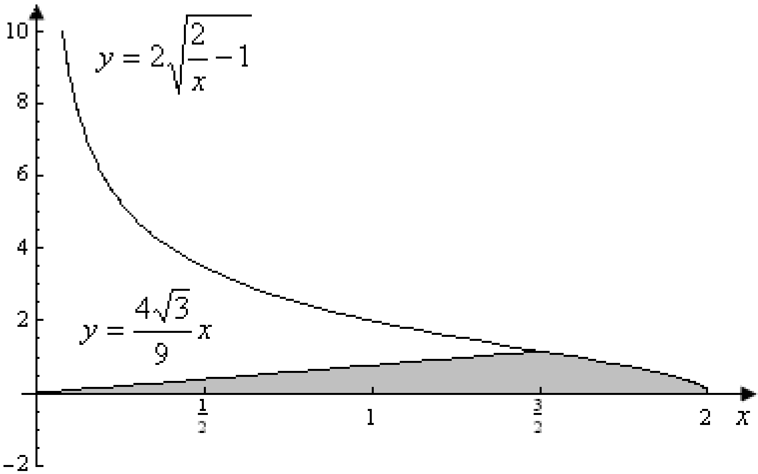
Di seguito il grafico.



Anche dal grafico si nota che se X tende ad O, e cioè $x \to 0^+$, l'ordinata di P tende a $+\infty$ mentre se X tende ad A, e cioè $x \to 2^-$, l'ascissa di P tende a 2 mentre l'ordinata è nulla.

Punto 4

La retta OP_1 ha equazione $y = \frac{4\sqrt{3}}{9}x$; la regione di piano delimitata dalla retta OP_1, da Γ e dall'asse x è di seguito raffigurata in grigio.



Il volume richiesto, applicando il Principio di Cavalieri, cioè immaginando il solido di rotazione come insieme delle sue sezioni con piani
perpendicolari all'asse x, è:

$$V = \pi\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}x\right)^2 dx + \pi\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(2\sqrt{\frac{2}{x}-1}\right)^2 dx = \pi\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{16}{27}x^2 dx + \pi\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(\frac{8}{x}-4\right)dx =$$

$$= \frac{16}{81}\pi\left[x^3\right]_0^{\frac{3}{2}} + 4\pi\left[2\ln|x| - x\right]_{\frac{3}{2}}^{2} = \frac{16}{81}\pi\cdot\frac{27}{8} + 4\pi\left[(2\ln 2 - 2) - \left(2\ln\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)\right] =$$

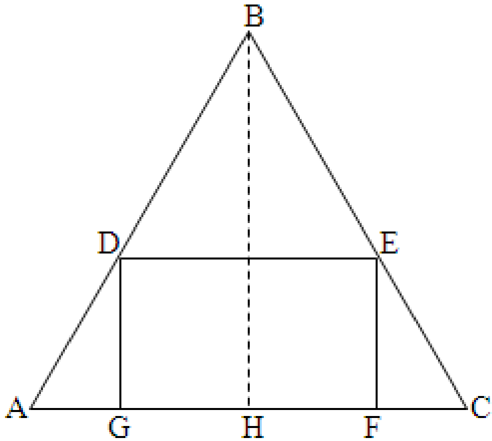
$$= \frac{2}{3}\pi + 4\pi\left(2\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) = \pi\left(8\ln\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right)$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si determini il cono di volume minimo circoscritto ad un cilindro dato.

Consideriamo la figura seguente che illustra la geometria del problema.



Per ipotesi il cilindro è noto, per cui sono noti l'altezza e il raggio di base; poniamo, pertanto, $\overline{EF}=h, \overline{HF}=r$ e $\overline{HC}=x$ con $x>r$. I triangoli EFC e BHA sono simili in quanto entrambi rettangoli con l'angolo $B\hat{C}H$ in comune; di conseguenza i lati omologhi sono proporzionali e vale la relazione $\overline{BH}:\overline{HC}=\overline{EF}:\overline{FC}$; sostituendo si ha $\overline{BH}:x=h:(x-r)$ da cui $\overline{BH}=\dfrac{hx}{x-r}$. Il volume del cono, di conseguenza, sarà pari a $V(x)=\pi\cdot\dfrac{\overline{BH}\cdot\overline{HC}^2}{3}=\dfrac{\pi h}{3}\cdot\dfrac{x^3}{x-r}$; per calcolare il volume minimo bisogna minimizzare la funzione $h(x)=\dfrac{x^3}{x-r}$ la cui derivata prima è $h'(x)=\dfrac{3x^2(x-r)-x^3}{x-r}=\dfrac{x^2(2x-3r)}{x-r}$ che risulta essere negativa in

$\left(r, \frac{3}{2}r\right)$ e positiva in $\left(\frac{3}{2}r, +\infty\right)$. Di conseguenza il volume è minimo per $x = \frac{3}{2}r$ e vale $V_{\min} = V\left(\frac{3}{2}r\right) = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}r\right)^3}{\frac{3}{2}r - r} = \frac{9}{4}\pi h r^3$; poichè il volume del cilindro dato, avente altezza *h* e raggio di base *r*, è pari a $V_{Cilindro} = \pi h r^3$ il volume del cono minimo circoscritto al cilindro è pari a $V_{\min} = V\left(\frac{3}{2}r\right) = \frac{9}{4}V_{Cilindro}$.

Quesito 2

Si consideri la regione R del primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, delimitata dal grafico di $y = e^{-2x}$, dall'asse x e dalla retta $x = \ln 3$. R è la base di un solido W che, tagliato con piani perpendicolari all'asse x, dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di W.

Il volume richiesto si ottiene integrando in $[0, \ln 3]$ l'area del quadrato di lato $y = e^{-2x}$ e cioè

$$V = \int_0^{\ln 3} \left(e^{-2x}\right)^2 dx = \int_0^{\ln 3} e^{-4x} dx = \frac{1}{4}\left[-e^{-4x}\right]_0^{\ln 3} = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-4\ln 3}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - e^{\ln\frac{1}{81}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{81}\right) = \frac{20}{81}$$

Quesito 3

Si calcoli l'area della regione delimitata dalla curva *y=cosx* e dall'asse *x* da *x=0* a *x=5* e con l'aiuto di una calcolatrice se ne dia il valore arrotondato con tre cifre decimali.

Ricordiamo che, nell'intervallo $[0,5]$, il coseno è positivo in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},5\right)$ e negativo in $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, pertanto l'area richiesta è:

$$S=\int_0^5|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos x)dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{5}\cos x dx$$

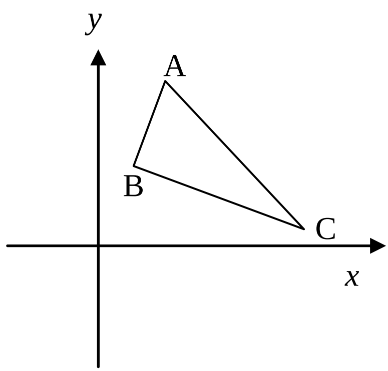
$$=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+[\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{5}=(1-0)-(-1-1)+(\sin 5+1)$$

$$=4+\sin 5\cong 3,041$$

Quesito 4

Sia AB un segmento di lunghezza 5dm. Si determini il luogo dei punti C dello spazio tali che $A\hat{B}C$ sia retto e $B\hat{A}C$ misuri 60°.

Consideriamo la figura a lato.



Il luogo appartiene sia al piano *s* passante per B e perpendicolare ad AB che alla superficie conica indefinita formata da tutte le semirette di origine A che formano con AB un angolo di 60°: il luogo cercato è quindi la circonferenza, giacente nel piano *s*, di centro B e raggio *r* pari al raggio di base di un cono di semiapertura 60° e altezza 5, cioè:

$$r=\overline{BC}=\overline{AB}\cdot\tan\left(B\hat{A}C\right)=5\cdot\tan(60°)=5\sqrt{3}.$$

L'equazione della circonferenza è $(x-a)^2+(y-b)^2=75$.

Quesito 5

Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?

Sia r il raggio della sfera inscritta il cui volume è $V_{Sfera}=\frac{4\pi}{3}r^3$. Il cubo circoscritto ha lato pari al diametro della sfera $l=2r$, di conseguenza il volume è $V_{Cubo}=l^3=8r^3$. Il rapporto tra i volumi è quindi

$$R=\frac{V_{Sfera}}{V_{Cubo}}=\frac{\frac{4\pi}{3}r^3}{8r^3}=\frac{\pi}{6}.$$

Quesito 6

Si risolva l'equazione $\binom{x}{2}+4=\binom{x+1}{2}$.

Affinché i coefficienti binomiali abbiano senso dobbiamo imporre $\begin{cases} x\geq 0 \\ x+1\geq 0 \\ x\in N \end{cases} \Rightarrow x\geq 0\wedge x\in N$; la condizione $x\geq 0\wedge x\in N$ equivale a dire che x deve essere un numero naturale non negativo o alternativamente che $x\in \mathrm{N}_0\equiv\{0,1,2,\cdots\cdots\}$.

Esplicitando i coefficienti binomiali l'equazione diventa:

$$\frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}+4=\frac{(x+1)!}{(x-1)!\cdot 2!}\Rightarrow\frac{x\cdot(x-1)}{2}+4=\frac{x\cdot(x+1)}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+4=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\Rightarrow x=4$$

La soluzione è accettabile in quanto rispetta la condizione $x\in \mathrm{N}_0$.

Quesito 7

Si dica se $f(x) = sen(x-\pi) + \cos(3x)$ è una funzione periodica ed in caso affermativo se ne determini il periodo.

La funzione $f_1(x) = \sin(\pi - x)$ ha periodo $T_1 = 2\pi$ mentre $f_2(x) = \cos(3x)$ ha periodo $T_2 = \frac{2\pi}{3}$; il periodo della somma (o della differenza) delle due funzioni trigonometriche è pari al minimo comune multiplo tra $T_1 = 2\pi$ e $T_2 = \frac{2\pi}{3}$ e cioè $T = m.c.m(T_1, T_2) = 2\pi$.